الرياضيات

للصف السادس الأدبي

للأستاذ سالم البغدادي

الفصل الاول

مبدأ العد : اذا امكن اجراء عملية باحدى الطرق المختلفة عددها (m) وكان لدينا في الوقت نفسه عملية اخرى يمكن اجرؤها بطريقة عددها (n) فأن عدد الطرق التي يمكن اجراء العمليتين معاً يساوي $m \times n$

مثال ① لدى منى (2) قميص و (3) قمصلة و (3) تنوره كم طريقة ممكنة لدى منى لتكون زي مختلفة؟

عدد الاختيار القميص = 2

〃 〃 القمصلة = 3

〃 〃 التنوره = 3

اذن عدد الاختيارات = $2 \times 3 \times 3 = 18$

مثال ② كم عدد رمزه مكون من رقمين واصغر من (40) يمكن تكوينه باستخدام مجموعة الارقام {1 , 2 , 3 , 4 , 5}

ⓐ التكرار مسموح ⓑ التكرار غير مسموح

العشرات	الاحاد
1	1
2	2
3	3
	4
	5

ⓐ عدد طرق اختيارات رقم العشرات = 3

〃 〃 〃 〃 الاحاد = 5

عدد الاختيارات = $3 \times 5 = 15$

ⓑ عدد طرق اختيارات رقم العشرات = 3

〃 〃 〃 〃 الاحاد = 4

عدد الاعداد او الاختيارات = $3 \times 4 = 12$

مثال ③ بكم طريقة يمكن تكوين عدداً من ثلاث ارقام واقل من (400) باستخدام الارقام {6و5و4و3و2و1} ⓐ التكرار مسموح

ⓑ التكرار غير مسموح

المئات	العشرات	الاحاد
1	1	1
2	2	2
3	3	3
	4	4
	5	5
	6	6

ⓐ عدد طرق اختيارات رقم المئات = 3

〃 〃 〃 العشرات = 6

〃 〃 〃 الاحاد = 6

عدد الطرق = $3 \times 6 \times 6 = 108$

ⓑ عدد طرق اختيارات رقم المئات = 3

〃 〃 〃 العشرات = 5

〃 〃 〃 الاحاد = 4

عدد الطرق = $3 \times 5 \times 4 = 60$

مثال ④ كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب واكبر من (500) من الارقام التالية {7و6و5و4و3و2و1} ⓐ التكرار مسموح ⓑ التكرار غير مسموح

المئات	العشرات	الاحاد
5	1	1
6	2	2
7	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7

ⓐ عدد طرق اختيارات رقم المئات = 3

〃 〃 〃 العشرات = 7

〃 〃 〃 الاحاد = 7

عدد الاعداد = $3 \times 7 \times 7 = 147$

ⓑ عدد طرق اختيارات رقم المئات = 3

〃 〃 〃 العشرات = 6

〃 〃 〃 الاحاد = 5

عدد الاعداد = $3 \times 6 \times 5 = 90$

الفرق بين الناجحين والفاشلين هو ان الفاشل عنده فن التأجيل والناجح عنده فن الانجاز

مثال ⑤ كم عدد مكونه رمزه من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام

{1، 2، 3، 4، 5، 6، 7}

ⓐ عدد زوجي من غير تكرار

ⓑ عدد فردي مسموح التكرار

ⓐ

المئات	العشرات	الاحاد
1	1	2
2	2	4
3	3	6
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	

عدد طرق اختيارات رقم الاحاد = 3

〃 〃 〃 〃 العشرات = 6

〃 〃 〃 〃 المئات = 5

عدد الطرق = $3 \times 5 \times 6 = 90$

ⓑ

المئات	العشرات	الاحاد
1	1	1
2	2	3
3	3	5
4	4	7
5	5	
6	6	
7	7	

عدد طرق اختيارات رقم الاحاد = 4

〃 〃 〃 〃 العشرات = 7

〃 〃 〃 〃 المئات = 7

عدد الطرق = $4 \times 7 \times 7 = 196$

جرب ان تُطعم طيراً أو تسقي وردة او تصلح ساقية سوف تكتشف مدى السعاده التي سوف تشعر بها ؟

← معناه التكرار غير مسموح

وزاري ٢٠١٠/١

مثال (5) كم عدد يتكون من ثلاث ارقام مختلفة ومن مضاعفات العدد (5) يمكن تكوينه من الارقام التي تنتمي للمجموعة

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

المئات	العشرات	الآحاد
1	1	5
2	2	
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	

عدد اختيارات رقم الآحاد = 1

〃 〃 〃 العشرات = 6

〃 〃 〃 المئات = 5

ملاحظة/ لو كان في مجموعة الارقام الرقم (0) ولوضعناه مع الآحاد لان مضاعفات الخمسة تكون بدايته اما (5) او (0)

مضروب العدد / هي عملية ضرب الاعداد الصحيحة الموجبة من العدد (n) ~~~~~ حتى رقم (1) ويرمز له $n!$ أو $\underline{|n}$

حيث $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots$

① $3! = 3\times 2\times 1 = 6$

② $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$

③ $5! - 3! = (5\times 4\times 3\times 2\times 1) - (3\times 2\times 1)$ وزاري

$= (120) - (6)$

$= 114$

④ $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7\times 6\times \cancel{5}\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times \cancel{1}}{\cancel{5}\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times \cancel{1}} = 42$

أو $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7\times 6\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 42$

⑤ $\dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$

ملاحظة /

$(n+1)! = (n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)!$

$(n+2)! = (n+2)(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)!$

---

⑥ اذا كان $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 20$ حل المعادلة (جد قيمة n)

$\dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 20$

$n(n-1) = 20$

$n^2 - n = 20$

$n^2 - n - 20 = 0$ يهمل قيم n لا تكون سالبة

$(n-5)(n+4) = 0$ ↓

اما $n - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 5}$ او $n + 4 = 0 \Rightarrow n = -4$

⑦ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$ حل المعادلة

$$\frac{(n+1)\,n\,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 30$$

$(n+1)n = 30$

$n^2 + n = 30$

$n^2 + n - 30 = 0$

$(n+6)(n-5) = 0$

(أ) $n+6 = 0 \Rightarrow n = -6$ يهمل

(ب) $n-5 = 0 \Rightarrow n = 5$

ملاحظة: دائماً نبحث على الرقم الذي فرق بين مربعين نأخذ الرقم الكبير بشارة السؤال الموجود مع n لتستطيع مثل $(n+6)$ نسبة إلى $(n+1)$ يعني الرقم الكبير يحمل في $(n+)$ ويفضل في $(n-)$

---

⑧ إذا كان $n! = 720$ فما قيمة n

1	720
2	720
3	360
4	120
5	30 ←
6	6
	1

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6!$

$n! = 6!$

$n = 6$

---

⑨ اثبت أن $0! = 1$

بما أن $n! = n(n-1)!$

عندما $n = 1$

$1! = 1(1-1)!$

$1 = 0!$

واجب / إذا كان $n! = 5040$ جد قيمة n

n	1	2	3	4	5	6	7
قيمة n	5040	5040	2520	840	210	42	7

1

$\Rightarrow n = 7$

سقيت زهره في حديقتي كان قد برح بها العطش فلم تقل لي شكراً ولكنها انتعشت فانتعشت معها روحي.

سالم البغدادي

التباديل P_r^n أو $P(n,r)$

عدد طرق القيام بتجربة بترتيب وبدون ارجاع ويرمز لها P_r^n
ويقرأ تبديل n مأخوذ منه r

قوانين التباديل

① $P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots 1$

$P_3^5 = 5\times4\times3 = 60$ (أي مفكوك 5 ثلاث مراتب)

$P_4^7 = 7\times6\times5\times4 = 840$ (أي مفكوك 7 اربع مراتب)

$P_3^8 = 8\times7\times6 = 336$

② $P_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ تنبيه عندما يكون r مجهول ⟸ (قليل الاستعمال)
انت مجبر باستعمال القانون الثاني كما في مثال (9) صفحة (10)

ملاحظة/

① $P_n^n = n!$ $P_3^3 = 3!$ ، $P_5^5 = 5!$

② $P_0^n = 1$ $P_0^3 = 1$ و $P_0^7 = 1$ ← برهان ذلك

$P_0^n = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

③ $P_1^n = n$ $P_1^3 = 3$, $P_1^5 = 5$

امثلة ① حل المعادلة $P_2^n = 72$

$n(n-1) = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$

$(n-9)(n+8) = 0 \xrightarrow{\text{اما}} n-9 = 0 \Rightarrow n = 9$

او $n+8 = 0 \Rightarrow n = -8$ يهمل

مثال ② حل المعادلة $P_3^{n+1} = 8P_2^n$

$(n+1)\cancel{n}(\cancel{n-1}) = 8\cancel{n}(\cancel{n-1})$

$n+1 = 8 \Rightarrow n = 8-1 \Rightarrow n = 7$

مثال 3 حل المعادلة $P_5^n = 8P_4^n$

$\cancel{n}(\cancel{n-1})(\cancel{n-2})(\cancel{n-3})(n-4) = 8\cancel{n}(\cancel{n-1})(\cancel{n-2})(\cancel{n-3})$

$n-4 = 8$

$n = 12$

مثال ④ جد قيمة n اذا كان $P_3^n = 56(n-2)$

(وزاري)

$n(n-1)(\cancel{n-2}) = 56(\cancel{n-2})$

$n^2 - n - 56 = 0$

$(n-8)(n+7) = 0 \Rightarrow$ اما $n-8 = 0$ او $n+7 = 0$

$n = 8$ ∴ $n = -7$ يهمل

مثال ⑤ حل المعادلة $\frac{P(n,3)}{P(n+1,4)} = \frac{1}{5}$

$\frac{\cancel{n}(\cancel{n-1})(\cancel{n-2})}{(n+1)\cancel{n}(\cancel{n-1})(\cancel{n-2})} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{5}$

$n+1 = 5 \Rightarrow n = 5-1$

$n = 4$

مثال (6) حل المعادلة $P(n+2,4) = 9P(n+1,3)$

$$(n+2)(n+1)n(n-1) = 9(n+1)n(n-1)$$

$$n+2 = 9$$

$$n = 7$$

مثال (7) جد قيمة n اذا علمت ان $35P(n-1,3) = 5P(n,4)$
(تمهيدي)

$$35(n-1)(n-2)(n-3) = 5n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$35 = 5n \quad (\div 5)$$

$$n = 7$$

مثال (8) اذا كان $P^n_4 = 12P^{n-2}_2$ اثبت ان $\frac{(n+3)!}{(2n-2)!} = 7$

$$P^n_4 = 12P^{n-2}_2$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 12(n-2)(n-3)$$

$$n(n-1) = 12$$

$$n^2 - n = 12$$

$$n^2 - n - 12 = 0$$

$$(n-4)(n+3) = 0$$

$n+3 = 0 \Rightarrow n = -3$ يهمل

$n-4 = 0 \Rightarrow n = 4$

الطرف الايسر $\frac{(n+3)!}{(2n-2)!} = \frac{(4+3)!}{(8-2)!} = \frac{7!}{6!} = \frac{7 \times 6!}{6!} = 7$

هناك في الحياه قضايا عظيمه وأخرى تافهه وكلما كان الانسان مرتبطاً بقضيه عظيمه كلما اكتسب عظمه تلك القضيه

مثال (٩) اذا كان $P^{6}_{r} = 120$ فما قيمة r

وزاري (2009/1)

القانون الثاني للتباديل $P^{n}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 120$$

$$120(6-r)! = 6!$$

$$120(6-r)! = 6\times5\times4\times3!$$

$$120(6-r)! = 120 * 3!$$

$$(6-r)! = 3!$$

$$6-r = 3$$

$$6-3 = r \Rightarrow r = 3$$

اذا كان $P^{5}_{r} = 20$ جد قيمة r

$$\frac{5!}{(5-r)!} = 20$$

$$20(5-r)! = 5!$$

$$20(5-r)! = 5\times4\times3!$$

$$(5-r)! = 3!$$

$$5-r = 3$$

$$5-3 = r$$

$$r = 2$$

مثال (١٠) اذا كان $P^{n+1}_{2} = 42$ جد n

مثال (١١) اذا علمت ان $2P(n,2) = 4!$ فما قيمة n وزاري 2010

$$2P(n,2) = 4!$$

$$2(n)(n-1) = 4\times3\times2\times1$$

$$n^2 - n = 12$$

$$n^2 - n - 12 = 0$$

$$(n-4)(n+3) = 0$$

$$n-4 = 0 \Rightarrow n = 4$$

$$n+3 = 0 \Rightarrow n = -3 \text{ يهمل}$$

ملعون ملعون من أخر صلاة الصبح حتى تغيب النجوم والمغرب

حتى تشتبك النجوم

تستعمل التباديل في الحالات التاليه

(حالة الاولى) عند طرق اختيار اعداد من الارقام او كلمات من حروف وما اشبه بذلك

مثال ① ما عدد الاعداد المكونه رمزه من رقمين مختلفين مأخوذ من (6) ارقام من دون تكرار

الجواب $P_2^6 = 6 \times 5 = 30$

مثال ② ما عدد الطرق التي نستطيع ان نكتب بها عدد مكوناً من (5) ارقام من الارقام $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

(توضيح) لاحظ الرقم $234 \neq 423$ رغم كونه من نفس الارقام أي الترتيب مهم لذا نستعمل التباديل)

$P_5^5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

مثال ③ جد عدد الكلمات المختلفه والتي يمكن الحصول عليها من حروف كلمه (النجف) بحيث تتكون من (3) حروف مختلفه

(توضيح : لاحظ كلمه نجف ≠ جفن رغم انهما من نفس الحروف الثلاث لذا الترتيب مهم وعليه نستعمل التباديل)

الجواب : $\{$ ا ، ل ، ن ، ج ، ف $\}$ = عدد حروف كلمه النجف

$P_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

مثال (4) ما عدد الكلمات التي تتألف كلاً منها من ثلاث حروف والتي تتكون منها كلمه (عراق)

$\{$ ع ، ر ، ا ، ق $\}$ = عدد حروف عراق

$P_3^4 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

سالم البغدادي

(الحالة الثانية) : السحب بترتيب ودون ارجاع

مثال ① ما عدد طرق سحب (3) اقلام من صندوق يحتوي على (8) اقلام بحيث يكون السحب دون ارجاع (بترتيب)

$P_3^8 = 8\times7\times6 = 336$

مثال ② كيس فيه (8) بطاقات مرقمة من (1) الى (8) سحبت منه بطاقة ثم ثانية ووضعت يمين الاولى وثالثة وضعت يمين الثانية فتكون عدد من ثلاث ارقام كم عدد نحصل عليه بهذه الطريقة السحب دون ارجاع مع مراعاة (الترتيب)

$P_3^8 = 8\times7\times6 = 336$

(الحالة الثالثة)

طلب تكوين لجان وحسب لها مناصب

منازل

مثال ① ما عدد طرق توزيع (4) اشخاص على (4) وظائف شاغرة بحيث كل شخص له فرصة على مساوية مع الآخرين

$P_4^4 = 4\times3\times2\times1 = 24$

مثال ② بكم طريقة يمكن ان يجلس خمس طلاب في صف من ثمانية كراسي

$P_5^8 = 8\times7\times6\times5\times4 = 6720$

مثال ③ سبع اشخاص يودون الجلوس ولم يتبق سوى (3) كراسي بكم طريقة يمكن ملء هذه الكراسي الثلاث

$P_3^7 = 7\times6\times5 = 210$

اذن اذا كان الترتيب مهماً ← فأننا نستخدم التباديل

التوافيق

التوافيق: هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء مأخوذ كلها أو بعضها بصرف النظر عن ترتيبها ويرمز لها

C_r^n أو $\binom{n}{r}$ أو $C(n,r)$

قوانين التوافيق

① $$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$$

أمثلة

$$C_2^5 = \frac{\overbrace{5\times 4}^{\text{مرتين}}}{\underbrace{2\times 1}_{\text{مفكوك 2}}} = 10$$

$$C_3^7 = \frac{\overbrace{7\times 6\times 5}^{\text{ثلاث مرات}}}{\underbrace{3\times 2\times 1}_{\text{مفكوك 3}}} = 35$$

$$C_5^{13} = \frac{\overbrace{13\times 12\times 11\times 10\times 9}^{\text{خمس مرات}}}{\underbrace{5\times 4\times 3\times 2\times 1}_{\text{مفكوك 5}}} = 1287$$

② $$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ملاحظة

① $C_0^n = 1$ $\qquad C_0^{10} = 1 \qquad C_0^3 = 1$

② $C_n^n = 1$ $\qquad C_2^2 = 1 \qquad C_3^3 = 1 \qquad C_5^5 = 1$

③ $C_r^n = C_{n-r}^n$ $\qquad \frac{n}{2} < r$ مفيده جداً

$$C_{13}^{15} = C_{15-3}^{15} = C_2^{15} = \frac{15\times 14}{2\times 1} = 105$$

$$C_6^8 = C_2^8 = \frac{8\times 7}{2\times 1} = 28$$

امثلة / ① جد قيمة n اذا كان $C^n_{20} = C^n_{35}$

الجواب / (لاحظ الاحظة 3) $C^n_{20} = C^n_{n-35}$

$\rightarrow n-35 = 20 \rightarrow n = 20+35$

$n = 55$

② اذا كان $C^n_{12} = C^n_6$ فما قيمة C^n_{15}

$C^n_{12} = C^n_6$

$C^n_{12} = C^n_{n-6} \rightarrow n-6 = 12$

(حسب الاحظة السابقة 3)

$n = 12+6$

$n = 18$

$C^n_{15} = C^{18}_{15} = C^{18}_3 = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2 \times 1} = 816$

③ جد قيمة n اذا كانت $2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

$2\,\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3 \times 2 \times 1}$

$1 = \frac{n+1}{6} \rightarrow n+1 = 6 \rightarrow n = 6-1$

$n = 5$

④ جد قيمة n اذا كان $C^{n+1}_4 = 12\,C^n_3$

$\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 12\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3 \times 2}$

$\frac{n+1}{24} = 2 \rightarrow n+1 = 48 \rightarrow n = 47$

تباديل ← توافيق

⑤ اذا كان $\dfrac{6P(n,3)}{C(4,2)} = 40\, C_2^{n-1}$

جد n

$$\frac{6n(n-1)(n-2)}{\frac{4\times3}{2\times1}} = 40\,\frac{(n-1)(n-2)}{2\times1}$$

$$\frac{6n}{6} = 20 \Rightarrow n = 20$$

وزاري ⑥ اذا علمت ان $3\,C_4^n = 14\,C_2^n$

جد قيمة (n) (أو حل المعادلة)

$$3\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1} = 14\,\frac{n(n-1)}{2\times1}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{8} = 7$$

$$(n-2)(n-3) = 56$$

$$n^2 - 3n - 2n + 6 - 56 = 0$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n+5)(n-10) = 0$$

اما $n+5=0 \Rightarrow n=-5$ يهمل $n \in \{1,2,3,4,\ldots\}$

او $n-10=0 \Rightarrow n=10$

كتب شخص على مرآة حيث يمكنه قراءتها كل صباح شعرت بالكآبة

لان لا حذاء لي حتى التقيت في الشارع برجل لا ساقين لديه

مثال ⑦ اذا كان $P_r^n = 72$, $C_r^n = 36$

فما قيمة كل من r , n

$$C_r^n = 36 \rightarrow \frac{P_r^n}{r!} = 36$$

$$\frac{72}{r!} = 36$$

$$36\, r! = 72$$

$$r! = \frac{72}{36}$$

$$r! = 2$$

$$r! = 2\times1$$

$$r! = 2! \rightarrow \boxed{r = 2}$$

$$P_r^n = 72 \rightarrow P_2^n = 72$$

$$n(n-1) = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

(يقبل) $n - 9 = 0 \Rightarrow n = 9$

(يهمل) $n + 8 = 0 \Rightarrow n = -8$ يهمل

② اذا كان $P_r^{n+1} = 42$, $C_r^{n+1} = 21$

جد قيم n, r

$$C_r^{n+1} = 21 \rightarrow \frac{P_r^{n+1}}{r!} = 21$$

$$\Rightarrow \frac{42}{r!} = 21$$

$$21\, r! = 42 \Rightarrow r! = \frac{42}{21}$$

$$r! = 2\times1 \rightarrow r! = 2! \rightarrow r = 2$$

$$P_r^{n+1} = 42$$

$$P_2^{n+1} = 42 \rightarrow (n+1)n = 42$$

$$n^2+n-42=0$$

$$(n+7)(n-6)=0$$

(1) $n+7=0 \Rightarrow n=-7$ يهمل

(2) $n-6=0 \Rightarrow n=6$

اسئلة كلامية حول التوافيق

الترتيب غير مهم لتوضيح هذه الفكرة اذا كانت لدينا $X=\{1,2,3\}$ كم مجموعة جزئية للمجموعة X مكونة من عنصرين الجواب $\{1,3\}$ و $\{1,2\}$ ، $\{2,3\}$ لاحظ في هذا المثال انه كل اختيار لم نضع اعتباراً للترتيب فمثلا الاختيار $\{1,2\}$ هو نفسه $\{2,1\}$ وكذلك $\{1,3\}$ هو نفسه $\{3,1\}$

* الفرق الوحيد بين التباديل والتوافيق هو مراعاة او عدم مراعاة الترتيب

امثلة (1) جد عدد المجموعات الجزئية الثنائية التي يمكن تكوينها من المجموعة $X=\{a,b,c,d,e,f\}$

$$C_2^6 = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15$$

م (2) ما عدد القطع المستقيمة التي يمكن ان تصل بين أي رأسين من رؤوس مضلع سداسي

الجواب $C_2^6 = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15$ قطعة

اختيار لجان وفرق

مثال ③ ما عدد الطرق لاختيار فريق لكرة القدم من (11) لاعباً من بين (25) لاعباً الاختيار دون ارجاع وعدم مراعاة الترتيب

$$C^{25}_{11} = \frac{25\times24\times23\times22\times21\times20\times19\times18\times17\times16\times15}{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= 4457400$$

مثال ④ بكم طريقة يمكن اختيار فريق كرة السلة يتكون من (5) لاعبين من بين (10) لاعبين الاختيار دون ارجاع ودون ترتيب

$$\text{عدد الطرق} = C^{10}_{5} = \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1} = 252$$

مثال ⑤ بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من (5) طالبات و(7) طلاب من بين مجموعة مكونة من (8) طالبات و (10) طلاب

10 طلاب	8 طالبات
7	5

$$\text{عدد الطرق} = C^{10}_{7} \times C^{8}_{5}$$

$$= C^{10}_{3} \times C^{8}_{3}$$

$$= \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} \times \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$$

$$= 120 \times 56 = 6720$$

ابلغ ما تستدر به الرحمة ان تضمر لجميع الناس الرحمة (قول لأمير المؤمنين ع)

مثال ⑥ بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثلاث رجال وسيدتين من بين (7) رجال و (5) سيدات (لاحظ الترتيب غير مهم)

5 سيدات	7 رجال
2	3

عدد الطرق $= C^{7}_{3} \times C^{5}_{2}$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1}$$

$$= 35 \times 10 = 350$$

اسئلة امتحانية

مثال ⑦ اذا كان عدد الاسئلة في الورقة الامتحانية (8) اسئلة والمطلوب الاجابة عن (6) منها فبكم طريقة يمكن الاجابة

(توضيح لو اجبت مثلا س1 و س2 س3 = س3 س2 س1 اي الترتيب غير مهم في الحصيلة النهائية)

$$C^{8}_{6} = C^{8}_{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \times 7}{\underset{1}{\cancel{2}} \times 1} = 28$$ طريقة

مثال ⑧ اذا احتوت ورقة امتحان على (6) اسئلة فبكم طريقة يمكن ان يجيب الطالب على اربعة منها

$$C^{6}_{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$$

طُلب من مالك خازن النار ان يعطي شيء من النار لآدم ليستعين بها على دنياه قال آدم: وكم تريد منها قال: قدر نملة قال مالك: اذا اعطيتك قدر نملة احترقت السماء والارض.

مثال (9) اذا كان عدد الاسئلة امتحان ما (8) اسئلة وكان المطلوب حل (5) اسئلة بشرط ان تكون (3) من الاربعة الاولى فبكم طريقة يمكن الاجابة

4 اسئلة الاولى	4 اسئلة الثانية	
3	2	=5

$$\text{عدد الطرق} = C_2^4 \times C_3^4$$

$$= \frac{4\times3}{2\times1} \times \frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}$$

$$= 6 \times 4 = 24$$

مثال (10) اذا كان عدد اسئلة امتحان مادة ما هو (10) اسئلة وكان المطلوب حل (7) اسئلة على ان تختار (4) من الخمس الاولى فبكم طريقة يمكن الاجابة

5 الاولى	5 الثانية	
4	3	=7

$$\text{عدد الطرق} = C_3^5 \times C_4^5$$

$$= \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} \cdot \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 10 \times 5 = 50$$

مثال (11) اذا كان عدد اسئلة ما (8) وكان المطلوب حل (5) اسئلة على ان تكون (3) من الست الاولى فبكم طريقة يمكن الاجابة

6 الاولى	2 المتبقية	
3	2	=5

$$\text{عدد الطرق} = C_2^2 \cdot C_3^6$$

$$= \frac{2\times1}{2\times1} \cdot \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$$

$$= 1 \times 20 = 20$$

صندوق الاقلام او الكرات

مثال (12) صندوق يحتوي على (8) اقلام يراد سحب (5) اقلام يكون السحب دون ارجاع ودون ترتيب

$$C^8_5 = C^8_3 = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$$

مثال (13) صندوق يحتوي على (6) كرات حمراء و (4) كرات بيضاء يراد سحب (5) كرات بشرط تكون (3) حمراء فقط بكم طريقة يمكن الاجابة

6 حمراء	4 بيضاء
3	2

5 =

$$\text{عدد الطرق} = C^4_2 \times C^6_3$$

$$= \frac{4\times3}{2\times1} \times \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$$

$$= 6 \times 20$$

$$= 120$$

ملاحظة (1) كلمة على الاقل نبدأ بذلك الرقم ونزيده
(2) كلمة على الاكثر نبدأ بذلك الرقم ونقللها

مثال (14) صندوق يحتوي على (4) كرات حمراء و (8) بيضاء سحبت ثلاث كرات معاً جد عدد طرق السحب بشرط على الاقل اثنان حمراء

4 حمراء	8 بيضاء
2 ← على الاقل 2	1
3	صفر

3 =

$$\text{عدد الطرق} = C^8_1 \times C^4_2 + C^8_0 \times C^4_3$$

$$= 8 \times \frac{4\times3}{2\times1} + 1 \times \frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}$$

$$= 8 \times 6 + 4$$

$$= 48 + 4$$

$$= 52$$

مثال (15) صندوق يحتوي على (10) كرات حمراء و (6) بيضاء سحبت منه (4) كرات معاً جد عدد طرق السحب على ان تكون

أ) كرتان بيضاء واثنان حمراء

ب) الكرات المسحوبة من نفس اللون

ج) على الاقل كرتين حمراء

د) على الاكثر كرتين حمراء

أ) كرتان بيضاء وكرتان حمراء

$$\text{عدد الطرق} = C^{6}_{2} \cdot C^{10}_{2}$$

$$= \frac{6\times5}{2\times1} \cdot \frac{10\times9}{2\times1} =$$

$$= 15 \cdot 45 = 675$$

	10 حمراء	6 بيضاء
4 =	2	2

ب) الكرات من نفس اللون

$$\text{عدد الطرق} = C^{10}_{4} + C^{6}_{4}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} + \frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 210 + 15 = 225$$

	10 حمراء	6 بيضاء
4 =	4	صفر
	صفر	4

ج)

$$\text{عدد الطرق} = C^{6}_{2}\, C^{10}_{2} + C^{6}_{1}\, C^{10}_{3} + C^{10}_{4}$$

$$= \frac{6\times5}{2\times1} \cdot \frac{10\times9}{2\times1} + 6 \cdot \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} + \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 675 + 720 + 210$$

$$= 1605$$

	10 حمراء	6 بيضاء
4 =	2	2
	3	1
	4	0

على الاقل 2

د)

$$\text{عدد الطرق} = C^{6}_{2}\, C^{10}_{2} + C^{6}_{3}\, C^{10}_{1} + C^{6}_{4}$$

$$= \frac{6\times5}{2\times1} \cdot \frac{10\times9}{2\times1} + \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \cdot (10) + \frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 675 + 200 + 15$$

$$= 890$$

	10 حمراء	6 بيضاء
4 =	2	2
	1	3
	0	4

على الاكثر 2

مبرهنة ذات الحدين : هي قانون للايجاد قوى مجموع حدين
ـــــ أي مقدار مكون من مجموع حدين مثل $x+y$ اذا رفع
الى أي اس صحيح موجب

تدريب

$$(x+y)^2 = \underset{=1}{C_0^2}\, x^2 + C_1^2\, x^1 y^1 + \underset{=1}{C_2^2}\, y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

مراجعة
$C_0^n = C_n^n = 1$
$C_1^n = n$

$$(x+y)^3 = \underset{\text{دائماً}=1}{C_0^3}\, x^3 + \underset{=3}{C_1^3}\, x^2 y^1 + \underset{\frac{3\times2}{2\times1}=3}{C_2^3}\, x^1 y^2 + \underset{\text{دائماً}=1}{C_3^3}\, y^3$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = \underset{=1}{C_0^4}\, x^4 + \underset{=4}{C_1^4}\, x^3 y^1 + \underset{\frac{4\times3}{2\times1}=6}{C_2^4}\, x^2 y^2 + \underset{C_1^4=4}{C_3^4}\, x y^3 + \underset{=1}{C_4^4}\, y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy + y^4$$

توضيح / ① عدد حدود المفكوك $(n+1)$ أي أكثر من القوة بواحد
② أس الحد الاول والاخير (n) أي نفس القوة
③ مجموع اسس الرموز المكونة للحد $= n$
④ اس الحد الاول يبدأ بالتناقص من اليسار الى اليمين واس
الحد الثاني يتناقص من اليمين الى اليسار
⑤ اذا اشارة حد الوسط $(-)$ فنضعها بالتناوب مع $+$

امثلة ① جد مفكوك $(x-y)^5$

$$(x-y)^5 = \underset{=1}{C_0^5}\, x^5 - \underset{=5}{C_1^5}\, x^4 y^1 + \underset{\frac{5\times4}{2\times1}=10}{C_2^5}\, x^3 y^2 - \underset{C_2^5=10}{C_3^5}\, x^2 y^2 + \underset{C_1^5=5}{C_4^5}\, x^1 y^4 - \underset{=1}{C_5^5}\, y^5$$

$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

سالم البغدادي

نتمنى لكم النجاح الباهر و الموفقية

مثال (2) جد مفكوك $(3a+b)^4$

$$(3a+b)^4 = C_0^4(3a)^4 + C_1^4(3a)^3 b + C_2^4(3a)^2 b^2 + C_3^4(3a)^1 b^3 + C_4^4 b^4$$

$C_0^4 = 1$ ، $C_1^4 = 4$ ، $C_2^4 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$ ، $C_3^4 = 4$ ، $C_4^4 = 1$

$$= (3a)^4 + 4(3a)^3 b + 6(3a)^2 b^2 + 4(3a)b^3 + b^4$$

$$= 81a^4 + 108a^3b + 54a^2b^2 + 12ab^3 + b^4$$

مثال (3) جد قيمة $(101)^3$ باستخدام نظرية ذي الحدين

$$(101)^3 = (100+1)^3 = C_0^3(100)^3 + C_1^3(100)^2(1)^1 + C_2^3(100)^1(1)^2 + C_3^3(1)^3$$

$C_0^3 = 1$ ، $C_1^3 = 3$ ، $C_2^3 = \frac{3\times2}{2\times1} = 3$ ، $C_3^3 = 1$

$$= (100)^3 + 3(100)^2 + 3(100) + 1$$

$$= 100.00.00 + 30000 + 300 + 1$$

$$= 1030301$$

مثال (4) جد قيمة $(99)^4$ باستخدام نظرية ذي الحدين

$$(99)^4 = (100-1)^4 = C_0^4(100)^4 - C_1^4(100)^3(1)^1 + C_2^4(100)^2(1)^2 - C_3^4(100)^1(1)^3 + C_4^4(1)^4$$

$$= 100.00.00.00 - 4000000 + 60000 - 400 + 1$$

اجمع الموجب مع الموجب واجمع السالب مع السالب ثم اطرح الكبير من الصغير

$$= 96059601$$

نسألكم الدعاء

أخوتكم
مصطفى الشمري
برهان الساعدي

مثال(ت) جد المقدار $(2+a)^4+(2-a)^4$ الى ابسط صوره

ثم جد قيمة المقدار عندما $a=\sqrt{3}$

$$(2+a)^4 = C_0^4(2)^4 + C_1^4(2)^3a^1 + C_2^4(2)^2a^2 + C_3^4(2)^1a^3 + C_4^4a^4$$

$$(2-a)^4 = C_0^4(2)^4 - C_1^4(2)^3a^1 + C_2^4(2)^2a^2 - C_3^4(2)^1a^3 + C_4^4a^4$$

بالجمع

$$= 2\underset{1}{C_0^4}(2)^4 + 2\underset{\frac{4\times3}{2\times1}=6}{C_2^4}(2)^2a^2 + 2\underset{1}{C_4^4}a^4$$

$(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}\sqrt{3} = 9$

$(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}$

$$(2+a)^4+(2-a)^4 = 32 + 48a^2 + 2a^4$$

$$= 32 + 48(\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3})^4 \qquad \text{عندما } a=\sqrt{3}$$

$$= 32 + 144 + 18 = 194$$

مثال(ك) جد قيمة المقدار $(102)^4-(98)^4$

$$(102)^4-(98)^4 = (100+2)^4-(100-2)^4$$

$$(100+2)^4 = C_0^4(100)^4 + C_1^4(100)^3(2)^1 + C_2^4(100)^2(2)^2 + C_3^4(100)^1(2)^3 + C_4^4(2)^4$$

$$(100-2)^4 = \mp C_0^4(100)^4 \mp C_1^4(100)^3(2)^1 \mp C_2^4(100)^2(2)^2 \mp C_3^4(100)^1(2)^3 \mp C_4^4(2)^4$$

بالطرح

$$(100+2)^4-(100-2)^4 = 2C_1^4(100)^3(2)^1 + 2C_3^4(100)^1(2)^3$$

$$= 2(4)(1000000)(2) + 2(4)100(8)$$

$$= 16000000 + 6400$$

$$= 16006400$$

ملاحظات / مفيده

فردية	زوجية
$(-1) = -1$	$(-1) = 1$
$(-1)^3 = -1$	$(-1)^2 = 1$
$(-1)^5 = -1$	$(-1)^4 = 1$
$(-1)^7 = -1$	$(-1)^8 = 1$

* $\left(\frac{x}{y}\right)^n \overset{\text{نوزع}}{=} \frac{x^n}{y^n}$ → مثال $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ ، $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$

* $x^n \, x^m = x^{n+m}$ → مثال $x^2 \cdot x^3 = x^5$ أي عند الضرب تجمع الأسس

→ مثال $x^2 \cdot x^{-3} = x^{-1}$

* $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ مثال $\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$

أي عند القسمة تطرح الأسس

* $(x^n)^m = x^{nm}$ مثال $(x^2)^3 = x^6$ عند الرفع تضرب الأسس

$(x^3)^5 = x^{15}$

* $(\sqrt{x})^2 = x$ أو $\sqrt{x}\sqrt{x} = x$

$(\sqrt{x})^3 = \underbrace{\sqrt{x}\,\sqrt{x}}_{x}\,\sqrt{x} = x\sqrt{x}$

قانون الحد العام

$$P_r = C^{n}_{r-1}\, x^{n-r+1}\, y^{r-1}$$

امثلة/ ① جد الحد الخامس في المفكوك $(a+b)^{10}$

$$P_5 = C^{10}_4\, a^6\, b^4 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\, a^6\, b^4$$

$$= 210\, a^6\, b^4$$

مثال ② اوجد الحد الخامس في المفكوك $(x-3y)^8$

$$P_5 = C^8_4\, (x)^4\, (-3y)^4 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\, x^4\; 81\, y^4$$

$$= 70\, x^4 \cdot 81\, y^4$$

$$= 5670\, x^4\, y^4$$

مثال ③ جد الحد السادس في المفكوك $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)^8$

$$P_6 = C^8_5 \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 \left(\frac{-x}{3}\right)^5$$

عند الضرب نجمع الاس

$$= \frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1}\left(\frac{x^6}{8}\right)\left(-\frac{x^5}{243}\right)$$

$3^5 = 3\times3\times3\times3\times3 = 243$

$$= \frac{-7}{243}\, x^{11}$$

السلام عليكم ايها البخلاء فقالوا ومن اين علمت اننا بخلاء قال: كذبوني ولو بلقمه

سالم البغدادي

مثال ④ اوجد الحد الثامن في المفكوك $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{10}$

$$P_8 = C^{10}_7 (2x)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^7$$

$$= C^{10}_3 (8x^3) \frac{1}{(x^7)}$$ (عند القسمة نطرح الاسس)

$$= \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} (8) \frac{1}{x^4}$$

$$= (120)(8) \frac{1}{x^4} = 960 \frac{1}{x^4}$$

ايجاد الحد الاوسط $(a+b)^n$

① اذا كان n (القوة) عدد زوجي فأن عدد الحدود $(n+1)$ وله حد وسطي رتبته $r = \frac{n}{2}+1$

② اذا كان n عدد فردي فله حدان اوسطان رتبتهما

$$r = \frac{n+1}{2} \quad , \quad r = \frac{n+1}{2}+1$$

اسم معلمه

(الشافعي)

شكوت الى وكيع سوء حفظي فأرشدني الى ترك المعاصي

وأخبرني بأن العلم نور ونور الله لا يهدى لعاصي

سالم البغدادي

مثال ① جد الحد الاوسط في المفكوك $(x-3)^8$

بما ان الاس عدد زوجي فانه يوجد حد أوسط واحد

$$r = \frac{n}{2}+1 = \frac{8}{2}+1 = 5$$

$$P_5 = C^{8}_{4}\, x^4\, (-3)^4$$

$$= \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\, x^4\, (81) = 5670\, x^4$$

مثال ② جد الحد الاوسط في المفكوك $\left(a-\frac{2}{a}\right)^{12}$

بما ان الاس عدد زوجي فأنه يوجد حد اوسط واحد رتبته

$$r = \frac{n}{2}+1 = \frac{12}{2}+1 = 7$$

$$P_7 = C^{12}_{6}\, (a)^6 \left(\frac{-2}{a}\right)^6$$

$$= \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2}\, a^6\, \frac{64}{a^6} = 59136$$

مثال ③ أوجد الحد الاوسط للمفكوك $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

بما ان الاس عدد زوجي فأنه يوجد حد اوسط واحد

$$r = \frac{n}{2}+1 = \frac{10}{2}+1 = 6$$

$$P_6 = C^{10}_{5}\, (\sqrt{x})^5 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}\, (\sqrt{x})^5\, \frac{1}{(\sqrt{x})^5}$$

$$= 252$$

مثال ④ جد الحدين الأوسطين في المفكوك $(2a-1)^7$

$r = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4 \Rightarrow r = 4$

$r = \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{7+1}{2} + 1 \Rightarrow r = 5$

$P_4 = C^7_3 (2a)^4 (-1)^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} (16) a^4 (-1)$

$= 35 (16) a^4 (-1)$

$= -560 a^4$

$P_5 = C^7_4 (2a)^3 (-1)^4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} (8) a^3$

$= 35 (8) a^3$

$= 280 a^3$

مثال ⑤ جد الحدين الأوسطين في المفكوك $\left(\frac{3a}{2} - \frac{2}{3a}\right)^7$

$r = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4 \Rightarrow r = 4$

$r = \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{7+1}{2} + 1 = 5 \Rightarrow r = 5$

$P_4 = C^7_3 \left(\frac{3a}{2}\right)^4 \left(\frac{-2}{3a}\right)^3$

$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \left(\frac{81 a^4}{16}\right)\left(\frac{-8}{27 a^3}\right) = \frac{-105}{2} a$

$P_5 = C^7_4 \left(\frac{3a}{2}\right)^3 \left(\frac{-2}{3a}\right)^4$

$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \left(\frac{27 a^3}{8}\right)\left(\frac{16}{81 a^4}\right)$

$= \frac{70}{3a}$

لا تضطرب لقلة الدراهم

ولا تبع دينك بدنياك ففي يوم الجزاء العزه للدين لا للدينار وبالدين الرقي لا بالدينار

ايجاد الحد المفقود ومعامله

مثال ① جد الحد الذي يحتوي على a^8 في المفكوك $(3+a^2)^8$ ثم جد معامله .

نفرض ان رتبة الحد الذي يحتوي a^8 في المفكوك هو r

$P_r = C^8_{r-1} (3)^{8-r+1} (a^2)^{r-1}$

$P_r = C^8_{r-1} (3)^{9-r} a^{2r-2}$

نعوض قيمة r لنجد معامله

$a^{2r-2} = a^8$

$2r-2 = 8 \Rightarrow 2r = 8+2 \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$

اذن الحد هو الحد الخامس

$P_5 = C^8_4 \, 3^4 \, a^8$

$= \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} (81) a^8 \rightarrow P_5 = 5670 a^8$

اذن معامل الحد الخامس هو 5670

مثال ② جد الحد الذي يحتوي على x^4 في المفكوك $(1+x^2)^6$ ثم جد معامله .

نفرض ان رتبة الحد الذي يحتوي x^4 في المفكوك هو r

$P_r = C^6_{r-1} (1)^{6-r+1} (x^2)^{r-1}$ ← (1 لان الواحد اي قوة = 1)

$P_r = C^6_{r-1} x^{2r-2}$ ← نعوض

$x^{2r-2} = x^4$

$2r-2 = 4 \Rightarrow 2r = 4+2 \Rightarrow 2r = 6 \Rightarrow r = 3$ الحد الثالث

$P_3 = C^6_2 \, x^4$

$P_3 = \frac{6\times5}{2\times1} x^4 \Rightarrow P_3 = 15x^4 \rightarrow$ اذن معامل x^4 هو (15)

سالم البغدادي

واجب/ جد قيمة الحد الخالي من x في مفكوك $\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^9$ الجواب $(r=4)$ $P_r=-489888$

مثال ③ جد الحد الخالي من x (x^0) في المفكوك $\left(x^2+\frac{2}{x^3}\right)^{10}$

ثم جد معامله

نفرض رتبة الحد الخالي من x (x^0) هو r

$$P_r = C^{10}_{r-1}\,(x^2)^{10-r+1}\left(\frac{2}{x^3}\right)^{r-1}$$

$$P_r = C^{10}_{r-1}\,(x^2)^{11-r}\,(2x^{-3})^{r-1}$$

وزّع

$$P_r = C^{10}_{r-1}\,x^{22-2r}\,2^{r-1}\,(x^{-3})^{r-1}$$

$$P_r = C^{10}_{r-1}\,x^{22-2r}\,2^{r-1}\,x^{-3r+3}$$

$$P_r = C^{10}_{r-1}\,x^{22-2r-3r+3}\,2^{r-1}$$

$$P_r = C^{10}_{r-1}\,x^{25-5r}\,2^{r-1}$$

عوض في الحد — المعامل

$$x^{25-5r} = x^0$$

$$25-5r=0 \Rightarrow 25=5r \Rightarrow r=5$$ الحد الخامس

$$P_5 = C^{10}_4\,x^0\,2^4$$

$$P_5 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2}\,(16)\,x^0$$

$$P_5 = 3360\,x^0 \Rightarrow$$ معامل الحد الخالي من x هو 3360

الشمس تشرق كل يوم بنور جديد وأمل جديد فلماذا لا تستقبل رحمه الله تعالى فيه بقلب مفعم بالامل.

الفصل الثاني / الغايات lim

① غاية العدد الثابت هو العدد الثابت نفسه (عندما x يقترب الى أي عدد)

امثلة /

$\lim\limits_{x \to 3} 7 = 7$

$\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$

---

② غاية الدالة الخطية (متعددة الحدود) التعويض المباشر

① $\lim\limits_{x \to 2} x^2+3 = (2)^2+3 = 7$

② $\lim\limits_{x \to 1} x^3+5x+3 = (1)^3+5(1)+3 = 9$

③ وزاري $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} 3x^4-5x^2+2 = 3(\sqrt{2})^4-5(\sqrt{2})^2+2$

$= 3(4) - 5(2) + 2$

$= 12 - 10 + 2 = 4$

توضيح: $4 = 2 \times 2 = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}$

---

③ الدالة الجذرية : إدخال الغاية داخل الجذر ثم التعويض المباشر

① $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{2x+5} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 3}(2x+5)} = \sqrt{2(3)+5} = \sqrt{11}$

② $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -1}(x+1)} = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0$

③ وزاري $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x^2+4x+6} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 1}(x^2+4x+6)} = \sqrt{(1)^2+4(1)+6} = \sqrt{11}$

④ $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{5x^2+1} - 7x) = \lim\limits_{x \to 0}\sqrt{5x^2+1} - \lim\limits_{x \to 0} 7x$

ونوزع الـ lim

$= \sqrt{\lim\limits_{x \to 0}(5x^2+1)} - \lim\limits_{x \to 0} 7x$

$= \sqrt{1} - 7(0) = 1$

④ الغاية الكسرية

الحالة الأولى / التعويض المباشر

① $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4}{2x+3} = \frac{(1)^2+4}{2(1)+3} = \frac{5}{5} = 1$

② $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x+4}{2x+5} = \frac{(0)^2+3(0)+4}{2(0)+5} = \frac{4}{5}$

③ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(1)^2-4}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3$

④ $\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{\sqrt{x+2}} = \frac{2-1}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

مراجعة / لطرق التحليل

① اخراج عامل مشترك / مثال

$x^2-2x = x(x-2)$

② فرق بين مربعين / امثلة

$x^2-9 = (x-3)(x+3)$

$x^4-4 = (x^2-2)(x^2+2)$

$x-1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$

③ التجربة / امثلة

$x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$

$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$

$x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$

④ فرق أو مجموع مكعبين /

$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

$x^3+27 = (x+3)(x^2-3x+9)$

الحالة الثانية / اذا كان التعويض المباشر يجعلها كمية غير معرفة أي يجعل المقام يساوي صفر فنلجأ الى التحليل أو الضرب بالعامل المنسب .

امثلة /

① $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x = 1$

② $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

③ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = \sqrt{1}+1 = 2$

④ $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})} = \lim_{x\to 5} (\sqrt{x}+\sqrt{5})$

$= \sqrt{5}+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

توضيح /

$\sqrt{5}+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 5$

⑤ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{(\sqrt{x}-1)}$

$= (\sqrt{1}+1)(1+1) = (2)(2) = 4$

⑥ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = 3+2 = 5$

وزاري

⑦ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3+1}{3+3} = \frac{4}{6}$

⑧ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{5}$

⑨ $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1+1}{-1+2} = \frac{0}{1} = 0$

وزاري

(10) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3+7x^2-8x}{3x^2-3} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x^2+7x-8)}{3(x^2-1)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x+8)\cancel{(x-1)}}{3(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{1(1+8)}{3(1+1)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

(11) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}}$

$= (3)^2 + 3(3) + 9 = 9+9+9 = 27$

(12) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ واجب /

(13) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{2x^2-8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x^2-4)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{2\cancel{(x-2)}(x+2)}$

$= \frac{4+4+4}{2(2+2)} = \frac{12}{8}$

كتاب

(14) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)}$

$= \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-2)(x^2+4)}$

$= \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2-2)((-2)^2+4)} = \frac{4+4+4}{(-4)(4+4)} = \frac{12}{-32} = \frac{3}{-8}$

(15) $\lim_{x \to 4} \frac{x^3-64}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x^2+4x+16)}{\cancel{(x-4)}}$

$= (4)^2 + 4(4) + 16$

$= 16 + 16 + 16 = 48$

سالم البغدادي

الضرب بالعامل المنسب (المرافق)

العامل المنسب هو نفس العدد بعكس اشارة الحد الثاني وعند ضرب العدد في مرافقه سيكون مربع الحد الاول ناقص مربع الثاني

أي

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

تدريب

$$(x-2)(x+2)=x^2-4$$

$$(x-5)(x+5)=x^2-25$$

$$(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)=x-9$$

$$(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=x-1$$

$$(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+1}-2)=(x+1)-4=x-3$$

$$(\sqrt{3x}+3)(\sqrt{3x}-3)=3x-9$$

$$(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)=x+5-9=x-4$$

$$(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})=1-(x+1)=\cancel{1}-x-\cancel{1}=-x$$

---

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

نلاحظ في هذا المثال اننا لا نستطيع التعويض المباشر لان المقام سيصبح = صفر ولا يمكن التحليل لذا سنلجأ الى الضرب بالعامل المنسب

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}*\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$=\lim\frac{(x+\cancel{1})-\cancel{1}}{x(\sqrt{x+1}+1)}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=$$

$$=\frac{1}{2}$$

(17) $$\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x} * \frac{2+\sqrt{4-x}}{2+\sqrt{4-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{4-(4-x)}{x(2+\sqrt{4-x})} = \lim \frac{\cancel{4}-\cancel{4}+\cancel{x}}{\cancel{x}(2+\sqrt{4-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{1}{2+\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

كتاب

(18) $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

$$\lim \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} * \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$=\lim_{x\to 3} \frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{3+1}+2)} = \frac{1}{4}$$

(19) $$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$$ (لاحظ هنا المثال اصبح هناك طريقتان لحله)

$$=\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} * \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$$

$$=\lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\cancel{(x-5)}} = \sqrt{5}+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

ملاحظة / نأخذ غاية للدالتين عندما x تقترب من الحاجز

دالة ذات الفترتين

امثلة / (1)

هل للدالة f غاية عند 1

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

2x ——•—— x^2+1 (عند 1)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2+1 = (1)^2+1 = 2 = L_1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2(1) = 2 = L_2 \end{cases}$$

بما أن $L_1 = L_2$ ← للدالة غاية عند 1 وقيمتها $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

---

(2)

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & x < 2 \\ x+1 & x > 2 \end{cases}$$

(a) هل للدالة f غاية عند 2

(b) جد $\lim_{x\to -1} f(x)$

(c) جد $\lim_{x\to 3} f(x)$

1−x ——•—— x+1 (عند 2)

(a)

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} x+1 = 2+1 = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} 1-x = 1-2 = -1 = L_2 \end{cases}$$

بما أن $L_1 \neq L_2$ ليس للدالة f غاية عند 2

(b) $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} 1-x = 1-(-1) = 2$

(c) $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x+1 = 3+1 = 4$

1−x ——↑(−1)——•(2)——↑(3)—— x+1

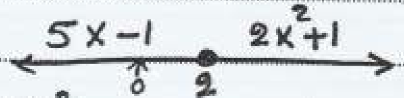
أحبب فيغدو الكوخ كوكباً نيراً وابغض فيمسي الكون سجناً مظلماً

وزاري

③ جد $f(x) = \begin{cases} 5x-1 & x < 2 \\ 2x^2+1 & x \geq 2 \end{cases}$

ⓐ $\lim_{x \to 2} f(x)$

ⓑ $\lim_{x \to 0} f(x)$



ⓐ
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} 2x^2+1 = 2(2)^2+1 = 9 = L_1 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} 5x-1 = 5(2)-1 = 9 = L_2 \end{cases}$$

بما ان $L_1 = L_2$

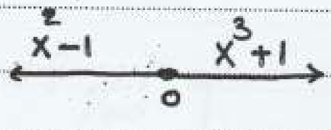
فأن للدالة غاية عند 2 وقيمتها 9 $\lim_{x \to 2} f(x) = 9$

ⓑ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 5x-1 = -1$

وزاري 2003/2

④ $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & x > 0 \\ x^2-1 & x \leq 0 \end{cases}$

ابحث وجود $\lim_{x \to 0} f(x)$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3+1 = (0)^3+1 = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2-1 = (0)^2-1 = -1 \end{cases}$$

بما ان $L_1 \neq L_2$ فليس للدالة غاية عند 0

البيت المبارك والمال المبارك والعمر المبارك والاولاد المباركون لا ينالونه إلا من خلال الابتعاد عن المعاصي

وزاري 2005 ⑤

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+4 & x\geq -1\\ 2-5x & x<-1\end{cases}$$ جد

ⓐ $\lim_{x\to -1} f(x)$

ⓑ $\lim_{x\to 2} f(x)$

$\xleftarrow{\;2-5x\;}\; -1 \;\xrightarrow{\;3x^2+4\;}$

ⓐ $\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1} 3x^2+4=3(-1)^2+4=7 & =L_1\\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1} 2-5x=2-5(-1)=7 & =L_2\end{cases}$

بما ان $L_1=L_2$ فأن للدالة غاية عند -1 وقيمتها $\lim_{x\to -1} f(x)=7$

$-1 \quad 3x^2+4$, 2

ⓑ $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} 3x^2+4=3(2)^2+4=12+4$
$=16$

2004 وزاري ⑥

$$f(x)=\begin{cases}3-x^2 & x\leq 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$$ هل للدالة f غاية عند 1 اثبت ذلك

$\xleftarrow{\;1\;}\; 0 \;\xrightarrow{\;-1\;}$

2004 وزاري ⑦

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\leq 0\\ -1 & x>0\end{cases}$$ جد $\lim_{x\to 0} f(x)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(-1)=-1=L_1\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(1)=1=L_2\end{cases}$

$L_1\neq L_2$ ليس للدالة f غاية عند 0

سالم البغدادي

ايجاد الثوابت على الغايات

① اذا كان $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-1}{x+2} = 2a+3$ جد قيمة a

$\frac{(1)^2+3(1)-1}{1+2} = 2a+3$

$\frac{3}{3} = 2a+3 \Rightarrow 2a+3=1$

$2a = 1-3$

$2a = -2 \Rightarrow a = -1$

② اذا كانت $\lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = 8$ جد قيمة a

$\lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)} = 8$

$\lim_{x \to a} x+a = 8$

$a+a = 8$

$2a = 8 \Rightarrow a = 4$

③ $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-2x+6}{x+3} = 3a-4$

جد قيمة a

$\frac{(4)^2-2(4)+6}{4+3} = 3a-4$

$\frac{16-8+6}{7} = 3a-4$

$$\frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\cancel{7}} = 3a - 4$$

$$2 = 3a - 4$$

$$2 + 4 = 3a$$

$$6 = 3a \quad \div 3$$

$$a = 2$$

مثال ④ جد قيمة $a \in R$ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 8x - 20} = 2a + 3$

وزاري 2010

(نأخذ الطرفين معاً)

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+10)} = 2a + 3$$

$$\frac{2+2}{2+10} = 2a + 3$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = 2a + 3$$

$$\frac{1}{3} = 2a + 3 \Rightarrow 6a + 9 = 1$$

$$6a = 1 - 9$$

$$6a = -8$$

$$a = \frac{-8}{6} \Rightarrow a = \frac{-4}{3}$$

وزاري 2012

مثال ⑤ اذا كانت $f(x) = ax^2 + 5$ وكانت $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = 7$ جد a

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = 7$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} ax^2 + 5 = 7$$

$$a(\sqrt{2})^2 + 5 = 7$$

$$2a + 5 = 7 \Rightarrow 2a = 7 - 5 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

وزاري

مثال ⑥ ليكن $f(x)=a^2x^2-ax+3$ وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)=9$ جد a

$$\lim_{x\to -1} f(x)=9$$

$$\lim_{x\to -1} a^2x^2-ax+3=9$$

$$a^2(-1)^2-a(-1)+3=9$$

$$a^2+a+3-9=0$$

$$a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0$$

اما $a+3=0 \Rightarrow a=-3$

او $a-2=0 \Rightarrow a=2$

مثال ⑦ اذا كانت $f(x)=ax^2+bx$

وكانت $\lim_{x\to -2} f(x)=8$ و $\lim_{x\to 1} f(x)=5$

جد a,b الحقيقين

$\lim_{x\to 1} f(x)=5$	$\lim_{x\to -2} f(x)=8$
$\lim_{x\to 1} ax^2+bx=5$	$\lim_{x\to -2} ax^2+bx=8$
$a(1)^2+b(1)=5$	$a(-2)^2+b(-2)=8$
$a+b=5$ ~~~ ②	$4a-2b=8$
$2a-b=4$ ~~~ ①	← $2a-b=4$ ~~~ ①

بالجمع

$3a=9 \quad \div 3$

$a=3$

نعوض في ②

$$3+b=5 \Rightarrow b=5-3 \Rightarrow b=2$$

مثال ⑧ اذا كانت $f(x)=ax^2+bx+3$

وكانت $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=8$

جد قيمة a و b الحقيقيتين

عوض ↙ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$	عوض ↙ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=8$
$\lim\limits_{x\to -1} ax^2+bx+3=4$	$\lim\limits_{x\to 1} ax^2+bx+3=8$
$a(-1)^2+b(-1)+3=4$	$a(1)^2+b(1)+3=8$
$a-b=4-3$	$a+b=8-3$
$a-b=1$ ~~ ①	$a+b=5$ ~~ ②

$a-b=1$ ~~ ①

$a+b=5$ ~~ ②

بالجمع

$2a=6$

$a=3$

نعوض في ①

$a-b=1$

$3-b=1$

$-b=1-3$

$-b=-2$

$b=2$

بين الحين والآخر يحتاج الانسان الى ان يغير المحيط الذي يعيش فيه لان روحه تتعب من الصور المتكرره والوجوه المتكرره والظروف المتكرره لذا السفر متعه للجسم والروح

وزاري 2005/1

مثال (9) اذا كانت $f(x)=ax^2+b$ وكانت $\lim_{x\to 2} f(x)=10$

والنقطة (-1,1) تنتمي لمنحني الدالة جد قيمة a,b

(-1,1) تنتمي للدالة أي تحقق المعادلة	$\lim_{x\to 2} f(x)=10$ (نعوض)
$f(x)=ax^2+b$ $1=a(-1)^2+b$ $1=a+b$ $a+b=1$ ~~~ (2)	$\lim_{x\to 2} ax^2+b=10$ $a(2)^2+b=10$ $4a+b=10$ ~~~ (1)

$4a+b=10$ ~~~ (1)

$\mp a \mp b=\mp 1$ ~~~ (2)

بالطرح

$3a=9$ $\div 3$

$a=3 \xrightarrow{(2)} 3+b=1 \Rightarrow b=1-3=-2$

مثال (10) اذا كانت $f(x)=ax^3+bx^2+5$ والنقطة (1,8) تنتمي لمنحني

الدالة f وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)=2$ فما قيمة $a,b\in R$

(1,8) تحقق المعادلة f	$\lim_{x\to -1} f(x)=2$ (نعوض)
$f(x)=ax^3+bx^2+5$ $8=a(1)^3+b(1)^2+5$ $8=a+b+5$ $8-5=a+b$ $3=a+b$ $a+b=3$ ~~~ (2)	$\lim_{x\to -1} ax^3+bx^2+5=2$ $a(-1)^3+b(-1)^2+5=2$ $-a+b=2-5$ $-a+b=-3$ ~~~ (1)

من قراءة فضيلة لعلي غفر الله لعينه ولسمعه ولسانه ويديه

هل تعلم ان حلقة الجنة اذا دقت قالت يا علي

$-a+b=-3$ ~ ①

$a+b=3$ ~ ②

بالجمع

$2b=0 \Rightarrow b=0$

$a+b=3$ نعوض في ②

$a+0=3$

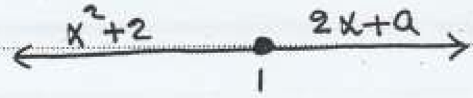
$a=3$

---

(11)

$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\leq 1 \\ 2x+a & x>1 \end{cases}$ وان $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة

جد قيمة a



بما ان $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة ⟸ غاية اليمين = غاية اليسار

$\lim_{x\to 1} x^2+2 = \lim_{x\to 1} 2x+a$

$(1)^2+2 = 2(1)+a$

$3 = 2+a$

$3-2=a$

$a=1$

يقول تعالى :

يا محمد اقرأ مني علي بن ابي طالب السلام وقل له فاني أحبه وأحب من يحبه

سالم البغدادي

د

(12) $f(x)=\begin{cases} a+2x & x\le -1 \\ 3-x^2 & x>-1 \end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)$ موجودة

جد قيمة $a\in R$

بما ان $\lim f(x)$ موجودة اذن

$a+2x$ ←—•—→ $3-x^2$ (عند -1)

غاية اليمين = غاية اليسار

$\lim_{x\to -1} a+2x = \lim_{x\to -1} 3-x^2$

$a+2(-1) = 3-(-1)^2$

$a-2 = 3-1$

$a-2 = 2$

$a = 2+2 \Rightarrow a = 4$

وزاري 2006 (13) $f(x)=\begin{cases} x-b & x<2 \\ ax^2-6 & x\ge 2 \end{cases}$ جد قيمة $a,b\in R$ بحيث $\lim_{x\to 2} f(x) = -2$

$x-b$ ←—•—→ ax^2-6 (عند 2)

غاية اليمين (-2)

$\lim_{x\to 2} ax^2-6 = -2$

$a(2)^2-6 = -2$

$4a-6 = -2$

$4a = -2+6$

$4a = 4$

$a = 1$

غاية اليسار (-2)

$\lim_{x\to 2} x-b = -2$

$2-b = -2$

$-b = -2-2$

$-b = -4$

$b = 4$

تمهيدي 2011

(14) اذا كانت $a,b \in R$ جد قيمه $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2 & x \geq 2 \\ 3x - b & x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 6$

$3x - b \quad \longleftarrow \; 2 \; \longrightarrow \quad ax^3 - 2$

غاية اليمين = 6	غاية اليسار = 6
$\lim_{x \to 2} ax^3 - 2 = 6$	$\lim_{x \to 2} 3x - b = 6$
$a(2)^3 - 2 = 6$	$3(2) - b = 6$
$8a - 2 = 6$	$6 - b = 6$
$8a = 6 + 2$	$-b = 6 - 6$
$8a = 8$	$-b = 0$
$a = 1$	$b = 0$

نسئل الله سبحانه و تعالى ان يوفقكم
و يوفقنا و يسهل امركم
و النجاح الباهر
و المعدل العالي يارب
مصطفى الشمري & برهان الساعدي

نسألـــــــ الدعـاء ـــــــكم

النظرة المتفائلة للامور تحفز العقل الباطن على الاحتفاظ بثروته وتحفز العقل الواعي الى العمل لذا قال علي (ع) (تفائل بالخير تنجح)

الاستمرارية

اذا كانت f دالة وكان العدد a ينتمي الى مجال الدالة f ويحقق الشروط

① $f(a)$ معرفة

② $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة

③ $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

فيقال ان f مستمرة عند $x = a$

ملاحظة / الدالة f اذا لم تحقق اي شرط من الشروط الثلاث فان f غير مستمرة عند $x = a$

ايجاد اوسع مجال الدالة

① اوسع مجال للدالة متعددة الحدود $= R$

② " " " الكسرية هي نقط الاعداد التي تجعل المقام يساوي صفر توضيح ذلك

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

اوسع مجال للدالة $R \backslash \{-1\}$

قال ابو الطفيل رأيت علياً (ع) يدعو اليتامى فيطعمهم حتى قال بعض اصحابه لوددت اني كنت يتيماً .

سالم البغدادي

تابعونا على الفيس بوك / صفحة الى
جميع طلاب السادس الاعدادي اضغط هنا

مثال / ① اذا كانت $f(x)=x^2+3$ هل ان f مستمرة عند $x=1$

اوسع مجال للدالة R لانها متعددة الحدود

① $f(1)=(1)^2+3=4$ معرفة

② $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2+3=(1)^2+3=4$

③ $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=4 \Rightarrow$ f مستمرة عند $x=1$

مثال ② ابحث استمرارية الدالة $f(x)=\frac{x}{x+1}$ عند $x=3$

اوسع مجال للدالة $R\setminus\{-1\}$

① $f(3)=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$ معرفة

② $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$ موجودة

③ $f(3)=\lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$ f مستمرة عند $x=3$

مثال ③ $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ ابحث استمرارية f عند $x=1$

اوسع مجال للدالة $R\setminus\{1\}$

بما ان $x=1 \notin$ للمجال فهي غير مستمرة عند $x=1$

أو

$f(1)=\frac{(1)^2+1}{1-1}=\frac{2}{\text{صفر}}$ فهي غير معرفة

سالم البغدادي

مثال (4) هل f مستمرة عند x=0

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x<0 \\ x^2+1 & x\geq 0 \end{cases}$$

$$\xleftarrow{\;2x+3\;} \overset{0}{\bullet} \xrightarrow{\;x^2+1\;}$$

(1) $f(0) = (0)^2+1 = 1$

(2) $\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2+1 = (0)^2+1 = 1 = L_1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 2x+3 = 2(0)+3 = 3 = L_2 \end{cases}$

بما أن $L_1 \neq L_2$ اذن الغاية غير موجودة عند $x=0$

اذن f غير مستمرة عند $x=0$

مثال (5) ابحث استمرارية الدالة عند $x=-1$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x\geq -1 \\ x^2 & x<-1 \end{cases}$$

$$\underset{x^2 \quad \overset{\bullet}{-1} \quad 3x+1}{\rule{4cm}{0.4pt}}$$

(1) $f(-1) = 3(-1)+1 = -3+1 = 2$

(2) $\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} 3x+1 = 3(-1)+1 = -3+1 = -2 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} x^2 = (-1)^2 = 1 \end{cases}$

$\because L_2 \neq L_1$

الغاية غير موجودة $\Leftarrow$ f غير مستمرة عند $x=-1$

الفشل حرام بدليل قوله تعالى (ولا تنازعوا فتفشلوا) فاذا كان مايسبب الفشل حراماً فكيف بالفشل نفسه.

مثال (6) (تمهيدي)

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq -1 \\ 3x+1 & x < -1 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = -1$

$3x+1 \quad \bullet_{-1} \quad x^2-2$

① $f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

② $\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} x^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} 3x+1 = 3(-1)+1 = -3+1 = 2 \end{cases}$

$2 \neq -1$ الغاية غير موجودة عند $x = -1$

الدالة f غير مستمرة عند $x = -1$

مثال ⑦ $f(x) = |x-2|$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = 2$

$f(x) = \begin{cases} x-2 & x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & x-2 < 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -x+2 & x < 2 \end{cases}$

$-x+2 \quad \bullet_{2} \quad x-2$

① $f(2) = 2 - 2 = 0$

② $\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} x-2 = 2-2 = 0 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} -x+2 = -2+2 = 0 \end{cases}$

③ $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$

اذن f مستمرة عند $x = 2$

ثوابت على الاستمرارية

مثال ①

$$f(x)=\begin{cases} ax+3 & x\geq 1 \\ 3x^2+1 & x<1 \end{cases}$$

جد قيمة $a \in R$ اذا كانت f مستمرة عند $x=1$

$3x^2+1$ ← • 1 → $ax+3$

بما ان f مستمرة عند $x=1$

أي الغاية موجودة عند $x=1$

غاية اليمين = غاية اليسار

$$\lim_{x\to 1} 3x^2+1 = \lim_{x\to 1} ax+3$$

$$3(1)^2+1 = a(1)+3$$

$$4 = a+3$$

$$4-3 = a$$

$$a = 1$$

مثال ②

$$f(x)=\begin{cases} 2x+b & x<-1 \\ x^2+a & x>-1 \end{cases}$$

جد قيمة $a, b \in R$ اذا علمت ان f مستمرة عند $x=-1$ وانه $f(2)=7$

$2x+b$ ← • -1 → x^2+a (↑ 2)

$$f(2)=7$$

$$(2)^2+a=7$$

$$4+a=7$$

$$a=7-4 \Rightarrow a=3$$

f مستمرة عند $x=-1$ ⟸ الغاية موجودة

اذن غاية اليمين = غاية اليسار

$$\lim_{x \to -1} 2x+b = \lim_{x \to -1} x^2+a$$

$$2(-1)+b = (-1)^2+3$$

$$-2+b = 1+3$$

$$b = 4+2$$

$$b = 6$$

مثال ③

$$f(x) = \begin{cases} ax^3-2 & x \geq 2 \\ 3x-b & x < 2 \end{cases}$$

جد قيم a و b اذا كان f مستمرة عند $x=2$ وكانت $f(3)=25$

الجواب / $a=1$ ، $b=0$

ليس من العيب ان تكون فينا شهوات ورغبات وان نشبعها بما هو حلال بل العيب ان تمتلكنا الشهوات والرغبات وتسلبنا إرادتنا .

الفصل الثالث

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

مثال ① اذا كانت $f(x)=x^2$ جد $f'(3)$ باستخدام التعريف

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3+\Delta x)^2-(3)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{9}+6(\Delta x)+(\Delta x)^2-\cancel{9}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(6+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6+0=6$$

مثال ② اذا كانت $f(x)=x^2+x+1$ جد $f'(2)$ باستخدام التعريف

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)+1-\left((2)^2+2+1\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{4}+4(\Delta x)+(\Delta x)^2+\cancel{2}+\Delta x+\cancel{1}-\cancel{7}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(5+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}5+\Delta x=5$$

قواعد الاشتقاق

الاولى / مشتقة الثابت = صفر

$f(x) = 7$ $f(x) = \sqrt{3}$ $f(x) = \frac{2}{3}$

$\acute{f}(x) =$ صفر $\acute{f}(x) =$ صفر $\acute{f}(x) =$ صفر

الثانية / $f(x) = x^n \Rightarrow \acute{f}(x) = n\,x^{n-1}$

① $f(x) = x^3 \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2$

② $f(x) = x^5 \Rightarrow \acute{f}(x) = 5x^4$

③ $f(x) = 2x^4 \Rightarrow \acute{f}(x) = 8x^3$

④ $f(x) = x^{-3} \Rightarrow \acute{f}(x) = -3x^{-4}$

⑤ $f(x) = 4x^{-5} \Rightarrow \acute{f}(x) = -20x^{-6}$

⑥ $f(x) = -2x^{-2} \Rightarrow \acute{f}(x) = 4x^{-3}$

⑦ $f(x) = 7x \Rightarrow \acute{f}(x) = 7$

⑧ $f(x) = -5x \Rightarrow \acute{f}(x) = -5$

⑨ $f(x) = x \Rightarrow \acute{f}(x) = 1$

⑩ $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^5 - 2$

$\acute{f}(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5x^4$

⑪ $f(x) = x^{-2} - 5x^3$

$\acute{f}(x) = -2x^{-3} - 15x^2$

⑫ جد $\acute{f}(x)$ للدالة $f(x) = 2x^5 + 2x$ عند $x = 1$

(أي نشتق ونعوض بدل $x = 1$)

$f(x) = 2x^5 + 2x^2$

$\acute{f}(x) = 10x^4 + 4x$

$\acute{f}(1) = 10(1)^4 + 4(1)$

$= 10 + 4 = 14$

وزاري 2005

(13) جد $f'(x)$ و $f''(x)$ عند $x=-1$

للدالة $f(x)=2x^3-x^2+x$

(أي نشتق ونعوض $x=-1$ ثم نشتق ثانيةً ونعوض $x=-1$)

$f(x)=2x^3-x^2+x$

$f'(x)=6x^2-2x+1$

$f'(-1)=6(-1)^2-2(-1)+1$

$=6+2+1$

$=9$

$f'(x)=6x^2-2x+1$

$f''(x)=12x-2$

$f''(-1)=12(-1)-2$

$=-12-2$

$=-14$

وزاري 2004

(14) جد $f'(x)$ و $f''(x)$ للدالة $f(x)=3x^2-5x+4$

عند $x=-4$

$f'(x)=6x-5$

$f'(-4)=6(-4)-5=-24-5=-29$

$f'(x)=6x-5$

$f''(x)=6$ (لا يوجد x نعوض فيه)

$f''(-4)=6$

---

(15) $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

(16) $f(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

(17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

(18) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$

الثالث / مشتقة حاصل ضرب دالتين

$f(x) = g(x)\ h(x)$

$\acute{f}(x) = g(x)\ \acute{h}(x) + h(x)\ \acute{g}(x)$

أي $\acute{f}(x) =$ (مشتقة الاول)(الثاني) + (مشتقة الثاني)(الاول)

① $f(x) = (2x^2+3)(5x^3+1)$ (الاول) (الثاني)

$\acute{f}(x) = (2x^2+3)(15x^2) + (5x^3+1)(4x)$ (الاول) (مشتقة الثاني) (الثاني) (م الاول)

② جد $\acute{f}(x)$ للدالة $f(x) = (x^2+1)(x^2-5)$ عند $x=1$

(اشتق وعوض $x=1$)

$\acute{f}(x) = (x^2+1)(2x) + (x^2-5)(2x)$

$\acute{f}(1) = (1+1)(2(1)) + (1-5)(2(1))$

$= (2)(2) + (-4)(2)$

$= 4 - 8 = -4$

③ جد $\acute{f}(2)$ للدالة $f(x) = (x^3+2)(2x^2-1)$

اشتق وعوض $x=2$

$\acute{f}(x) = (x^3+2)(4x) + (2x^2-1)(3x^2)$

$\acute{f}(2) = (8+2)(8) + (2(4)-1)(3(4))$

$= 80 + (7)(12)$

$= 80 + 84$

$= 164$

القاعدة الرابعة / مشتقة قسمة دالتين

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x)=\frac{h(x)\,g'(x)-g(x)\,h'(x)}{(h(x))^2}$$

أي

$$f'(x)=\frac{(\text{المقام})(\text{مشتقة البسط})-(\text{البسط})(\text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

① جد مشتقة الدالة عند $x=1$

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^4+1}$$

$$f'(x)=\frac{(x^4+1)(3x^2)-(x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{(1+1)(3)-(1+1)(4)}{(1+1)^2}$$

$$=\frac{6-8}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

② جد $f'(1)$ للدالة

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)(2x)-(x^2)(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{(2)(2)-(1)(1)}{(1+1)^2}$$

$$=\frac{4-1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}$$

③ جد $f'(2)$ للداله $f(x)=4x^3+6+\frac{3}{x^2}$

$$f'(x)=12x^2+0+\frac{x^2(0)-3(2x)}{(x^2)^2}$$

$$f'(x)=12x^2+\frac{-6x}{x^4}$$

$$f'(2)=12(2)^2-\frac{6(2)}{(2)^4}$$

$$=12(4)-\frac{12}{16}=48-\frac{3}{4}=\frac{192-3}{4}=\frac{188}{4}=47$$

خامساً / مشتقة الداله الاسيه

$$f(x)=(\text{داله})^n \Rightarrow f'(x)=n\,(\text{داله})^{n-1}\,(\text{مشتقة داخل القوس})$$

① $f(x)=(x^2+3)^3 \Rightarrow f'(x)=3(x^2+3)^2(2x)=6x(x^2+3)^2$

② $f(x)=2(x^2+5)^7 \Rightarrow f'(x)=14(x^2+5)^6(2x)=28x(x^2+5)^6$

③ $f(x)=\sqrt{x^2+5x-2} \Rightarrow f(x)=(x^2+5x-2)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+5x-2)^{-\frac{1}{2}}(2x+5)$$

④ $f(x)=(x^4+3x^2-3)^{\frac{3}{2}}$

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x^4+3x^2-3)^{\frac{1}{2}}(4x^3+6x)$$

⑤ $\bar{f}(1)$ للدالة $f(x) = (2x-3)^4$

$\bar{f}(x) = 4(2x-3)^3 \; (2)$

$\bar{f}(x) = 8(2x-3)^3$

$\bar{f}(1) = 8(2(1)-3)^3$

$= 8(-1)^3$

$= -8$

وزاري 2004

⑥ جد $\bar{g}(x)$ للدالة $g(x) = (x^3-7)^{10}$ عند $x=2$

$\bar{g}(x) = 10(x^3-7)^9 \; (3x^2)$

$\bar{g}(x) = 30x^2(x^3-7)^9$

$\bar{g}(2) = 30(2)^2(2^3-7)^9$

$= 120(1)^9$

$= 120$

⑦ جد $\bar{f}(3)$ للدالة $f(x) = (8x+1)^{\frac{3}{2}}$

$\bar{f}(x) = \frac{3}{2}(8x+1)^{\frac{1}{2}} \; (8)$

$\bar{f}(x) = 12(8x+1)^{\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(3) = 12(8(3)+1)^{\frac{1}{2}}$

$= 12(25)^{\frac{1}{2}}$

$= 12(5^2)^{\frac{1}{2}}$

$= 60$

س/ جد $\bar{f}(x)$ عند $x=1$ للدالة $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4$ الجواب $\left(\frac{1}{8}\right)$ الكتاب ص 71

قولوا لا إله إلا الله واتركوا ايديكم تعمل هذا ما قاله السيد الشيرازي عندما كان يدخل على اهل بيته في المطبخ

معادلة المماس للمنحني

لإيجاد معادلة المماس نتبع الخطوات التالية

① نعوض قيمة x أو y المعطى في السؤال لنحصل على المتغير الآخر فتكون (x_1, y_1) نقطة التماس

② نشتق ونعوض قيمة x فنحصل على الميل (m)

③ من النقطة (x_1, y_1) والميل (m) نعوض في العلاقة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال (1) جد معادلة المماس للمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 5x + 2$ عند $x = 1$

① نعوض $x = 1$ في الدالة

$$y = f(1) = (1)^2 - 5(1) + 2$$

$$y = -2 \Rightarrow (1, -2) \text{ نقطة التماس}$$

② نشتق ونعوض $x = 1$

$$f(x) = x^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$f'(1) = 2(1) - 5 = -3 = m$$

③ $(\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{-2})$ $\quad m = -3$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = -3(x - 1)$$

$$y + 2 = -3x + 3$$

$$y + 2 + 3x - 3 = 0$$

$$y + 3x - 1 = 0$$

وزاري 2007

واجب / جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = x^2 - 2x + 3$ عند $x = 2$

مثال ② جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$ عند $x=5$

① نعوض $x=5$ في المعادلة

$$f(x)=\sqrt[3]{x+3} \Rightarrow f(x)=(x+3)^{\frac{1}{3}}$$

$$y=f(5)=(5+3)^{\frac{1}{3}}=(8)^{\frac{1}{3}}=(2^{3})^{\frac{1}{3}}=2$$ نقطة التماس $(5,2)$

② نشتق ونعوض $x=5$

$$f(x)=(x+3)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}}(1)$$

$$f'(5)=\frac{1}{3}(5+3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}(2^{3})^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot 2^{-2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}=m$$

③ $(5,2)$ نقطة التماس $m=\frac{1}{12}$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=\frac{1}{12}(x-5) \qquad (\times 12)$$

$$12y-24=x-5$$

$$12y-24-x+5=0$$

$$12y-x-19=0$$

امشِ دائماً مشية المتواضع وليس مشية الكبرياء فالطبيعي شأنها شأن الناس تحب المتواضعين وتكره المتكبرين .

وزاري 2004
2005

③ جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y=(x-3)^3$ عند $x=2$

① نعوض $x=2$ في المعادلة

$y=(x-3)^3$
$y=(2-3)^3$
$y=(-1)^3$
$y=-1 \Rightarrow (2,-1)$ نقطة التماس

② نشتق ونعوض $x=2$

$y=(x-3)^3$
$y'=3(x-3)^2$
$y'_{(2)}=3(2-3)^2$
$=3(-1)^2$
$=3 \Rightarrow m=3$ الميل

(ملاحظة: ميل العمود هو $m_\perp=\frac{-1}{m}$
(أي مقلوب بعكس الإشارة)

③ المعادلة

معادلة المماس

$m=3$ نقطة التماس $(2,-1)$ (x_1, y_1)
$y-y_1=m(x-x_1)$
$y+1=3(x-2)$
$y+1=3x-6$
$y+1-3x+6=0$
$y-3x+7=0$

معادلة العمود

$m_\perp=\frac{-1}{3}$ نقطة التماس $(2,-1)$
$y-y_1=m(x-x_1)$
$y+1=\frac{-1}{3}(x-2)$ (نضرب × -3)
$-3y-3=x-2$
$-3y-3-x+2=0$
$-3y-x-1=0$

(هل تعلم ان الرياضة عامل مضاد للكآبة والتوتر العصبي)

5

مثال (4) جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني

$y = \frac{2x+1}{3-x}$ عند $y=5$

(1) نعوض $y=5$ في المعادلة

$$5 = \frac{2x+1}{3-x} \Rightarrow 5(3-x) = 2x+1$$

$$15-5x = 2x+1$$

$$15-5x-2x-1=0$$

$$14-7x=0$$

$$14=7x \qquad \div 7$$

$$x=2 \Rightarrow (2,5)$$ نقطة التماس

(2) نشتق ونعوض $x=2$ لنحصل على الميل

$$y = \frac{2x+1}{3-x} \Rightarrow y' = \frac{(3-x)(2)-(2x+1)(-1)}{(3-x)^2}$$

$$y'_{(2)} = \frac{(3-2)2-(4+1)(-1)}{(3-2)^2}$$

$$y' = \frac{2+5}{1} = 7 = m$$

(3) المعادلة

معادلة المماس

$$m=7 \ , \ (2,5)$$

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-5 = 7(x-2)$$

$$y-5 = 7x-14$$

$$y-5-7x+14=0$$

$$y-7x+9=0$$

معادلة العمود

$$m = \frac{-1}{7} \ , \ (2,5)$$ (x_1, y_1)

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-5 = \frac{-1}{7}(x-2)$$ نضرب (7)

$$-7y+35 = x-2$$

$$-7y+35-x+2=0$$

$$-7y-x+37=0$$

سالم البغدادي

مثال (5) 4 جد معادلة العمود للمنحني $f(x) = \frac{x}{1+2x}$ عند $x = -1$

وزاري 2008

① نعوض $x = -1$ في الدالة

نقطة التماس $(-1, 1) \Leftarrow$ $f(x) = \frac{-1}{1+2(-1)} = \frac{-1}{1-2} = \frac{-1}{-1} = 1$

② نشتق ونعوض $x = -1$

$$f(x) = \frac{x}{1+2x}$$

$$f'(x) = \frac{(1+2x)(1) - x(2)}{(1+2x)^2}$$

$$= \frac{1+2x-2x}{(1+2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+2x)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{1}{(1+2(-1))^2} = \frac{1}{(1-2)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

ميل المماس $m = 1$

ميل العمود $m_{العمود} = \frac{-1}{1} = -1$

③ نقطة التماس $(-1, 1)$ $m_{العمود} = -1$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x+1)$$

$$y - 1 = -x - 1$$

معادلة العمود $y - 1 + x + 1 = 0 \Rightarrow y + x = 0$

(ملاحظة)

① اذا ذكر في السؤال ان المنحني يقطع محور الصادات فان $x = 0$

② 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 السينات 〃 〃 $y = 0$

سالم البغدادي

مثال (٨) جد معادلة المماس للمنحني $y = x^2 + 1$ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات

الجواب / عند نقطة تقاطع مع محور الصادات $x = 0$

① نعوض $x = 0$ في الدالة

نقطة التماس $(0 , 1)$ $\Leftarrow$ $y = 1$ $\Leftarrow$ $y = (0)^2 + 1$

② نشتق ونعوض $x = 0$

$y = x^2 + 1$

$y' = 2x$

$y'_{(0)} = 2(0) = 0$ الميل

③ $(0 , 1)$ نقطة التماس $m = 0$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 0(x - 0)$

$y - 1 = 0$

كيف نجد نقاط التماس

(اولاً) عندما المماس يوازي محور السينات

طريقة الحل

① نشتق ونصفر لنجد x

② نعوض قيمة x في المعادلة الاصلية لنحصل على قيمة y

حديث / من سر مؤمناً فقد سرني ومن سرني فقد سر الله .

سالم البغدادي

مثال ① جد احداثيات النقطة التي تنتمي للمنحني $y = x^2 - 4x + 2$
والتي عندها مماس المنحني يوازي محور السينات

① نشتق ونضع لجد x

$y = x^2 - 4x + 2$

$y' = 2x - 4$

$2x - 4 = 0 \quad \div 2$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

② نعوض $x = 2$ في المعادلة الاصلية

$y = x^2 - 4x + 2$

$y = (2)^2 - 4(2) + 2$

$y = 4 - 8 + 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (2, -2)$ نقطة التماس

مثال ② جد احداثيات النقطة على المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$
وزاري 2003 بحيث يكون عندها المماس موازي لمحور السينات

① نشتق ونضع لجد x

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ (تجريه)

$(x - 3)(x + 1) = 0$

(اما) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

(او) $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

نلاحظ ان هنالك قيمتين لـ x لذا نعوض كل واحدة في
المعادلة الاصلية لنحصل على قيمة y

② نعوض قيم x في المعادلة الاصلية

عندما $x=-1$

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

$y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4$

$y = -1 - 3 + 9 + 4$

$y = 9 \Rightarrow (-1, 9)$ نقطة التماس

عندما $x=3$

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

$y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4$

$y = 27 - 27 - 27 + 4$

$y = -23 \Rightarrow (3, -23)$ نقطة التماس

(حالة الثانية) كيف نجد نقطة التماس اذا كان الميل معلوم

طريقة الحل / ① نشتق ونساويه للميل المعلوم لنجد x

② نعوض بالدالة لنحصل على y

مثال ① جد نقطة تنتمي للمنحني $y = x^2 - 5x + 4$ والتي ميل المماس عندها يساوي 3 (وزاري 2008)

الجواب ① نشتق ونساويها 3

$y = x^2 - 5x + 4$

$y' = 2x - 5$

$2x - 5 = 3$

$2x = 3 + 5$

$2x = 8$

$x = 4$

② نعوض x=4 في المعادلة الاصلية

$y = x^2 - 5x + 4$

$y = (4)^2 - 5(4) + 4$

$y = 16 - 20 + 4$

$y = 0 \Rightarrow (4, 0)$ نقطة التماس

الحالة الثالثة

كيف نجد نقاط التماس اذا كان المستقيم المماس يوازي مستقيم معلوم

طريقة الحل

① نجد ميل المستقيم من العلاقة $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$ وهو نفسه ميل المستقيم المماس

② نشتق المعادلة ونجعلها = الميل لنجد قيم x

③ نعوض قيم x في المعادلة الاصلية لنجد قيم y

مثال ① جد نقطة تنتمي الى المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y + 2x + 3 = 0$

① من المعادلة $y + 2x + 3 = 0$ نجد الميل (معامل x = 2، معامل y = 1)

$m = \frac{-2}{1} \Rightarrow m = -2$

② نشتق المعادلة ونساويها (-2)

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

$f'(x) = 2x - 4 = -2$

$2x = -2 + 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

③ نعوض في المعادلة الاصلية عن x=1

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

$y = f(1) = (1)^2 - 4(1) + 5 = 1 - 4 + 5 = 2 \Rightarrow (1, 2)$ نقطة التماس

سالم البغدادي

مثال ② جد نقطة تنتمي الى المنحني $f(x) = x^2+3x+1$

وزاري 2004 والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $x-y=2$

(1) معامل x ، (-1) معامل y

① نجد ميل المستقيم

$m = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-1}{-1} = 1$ = ميل المماس

② نشتق المعادلة ونساويها (1)

$f(x) = x^2+3x+1$

$f'(x) = 2x+3$

$2x+3 = 1$

$2x = 1-3$

$2x = -2 \quad \div 2$

$x = -1$

③ نعوض قيمة $x=-1$ في المعادلة الاصلية

$f(x) = x^2+3x+1$

$y = f(-1) = (-1)^2+3(-1)+1$

$y = 1-3+1$

$y = -1 \Rightarrow (-1,-1)$ نقطة التماس

وزاري 2003

واجبات / ① جد نقطة تنتمي الى المنحني $f(x) = 2x^2-3x+5$ بحيث يكون المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $2x-2y=1$

(الجواب $m=1$ ، $x=1$ ، $(1,4)$ نقطة التماس)

وزاري 2001

② جد نقطة تقع على منحني الدالة $f(x) = x^2-8x$ عندها يكون مماس منحني الدالة موازي للمستقيم $y+2x=0$

وزاري 2006 (الجواب $m=-2$ ، $(3,-15)$)

③ جد نقطة تنتمي للمنحني $f(x) = 2x^2-5x+1$ التي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $x+y=3$.

تابعونا على الفيس بوك / صفحة الى
جميع طلاب السادس الاعدادي اضغط هنا

ايجاد الثوابت على موضوع المماس

مثال ① اذا كانت $f(x)=x^2+ax+b$ وكان ميل المماس للمنحني عند $x=-1$ هو (4)
وكان المنحني يمر بالنقطة $(-3,2)$ جد قيمة a,b الحقيقيتين

① نشتق المعادلة = 4 ونعوض $x=-1$

$f(x)=x^2+ax+b$

$f'(x)=2x+a$

$2(-1)+a=4$

$-2+a=4 \Rightarrow a=4+2 \Rightarrow \boxed{a=6}$

② المنحني يمر بالنقطة $(-3,2)$ ⟸ يحقق المعادلة

($a=6$) ; x ، y او $f(x)$

$f(x)=x^2+6x+b$

$2=(-3)^2+6(-3)+b$

$2=9-18+b$

$2=-9+b \Rightarrow b=2+9 \Rightarrow \boxed{b=11}$

مثال ② اذا علمت ان $f(x)=ax^2+bx$ وكان ميل المماس للمنحني يساوي (4) عند $x=-1$ وكانت المشتقة الثانية = (2) جد قيمة a,b (وزاري 2001)

① نشتق المعادلة = 4 ونعوض $x=-1$

$f(x)=ax^2+bx$

$f'(x)=2ax+b$

$2a(-1)+b=4 \Rightarrow -2a+b=4$ ~~~ ①

② المشتقة الثانية = 2

$f''(x)=2a=2$

$\boxed{a=1}$ نعوض في ①

$-2(1)+b=4$

$-2+b=4 \Rightarrow b=4+2 \Rightarrow \boxed{b=6}$

مثال ③ اذا كانت $f(x)=x^2+ax+b$ وكان ميل المماس للمنحني عند
وزاري (2000) $x=-1$ هو 4 جد قيمة $a,b\in R$ اذا علمت ان المنحني يمر
بالنقطة $(-3,-2)$ ؟ واجب

التطبيقات الفيزياوية على المشتقة

الازاحة او الموقع او الموضع (اقصى ارتفاع)	← اشتقاق	السرعة	← اشتقاق	التعجيل
$S(t)$		$v(t)$		$a(t)$
متر		متر/ساعة		متر/ساعة^2
كم		كم/ساعة		كم/ساعة^2

وزاري 2003 مثال ① جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $S(t)=t^3+3t^2+4t+1$
حيث $S(t)$ تقاس بالامتار والزمن بالدقائق جد موضعه وسرعته وتعجيله
بعد (5) دقيقة من بدأ الحركة

$S(t)=t^3+3t^2+4t+1$

$S(5)=(5)^3+3(5)^2+4(5)+1$

$=125+75+20+1=221$ متر

$v(t)=S'(t)=3t^2+6t+4$

$v(5)=3(5)^2+6(5)+4$

$=75+30+4=109$ م/دقيقة

$a(t)=6t+6$

$a(5)=6(5)+6=36$ م/(دقيقة)^2

وزاري 2003 مثال ② يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $S(t)=t^2-20t+120$ حيث ان البعد يقاس كم والزمن بالساعة جد ① السرعة بعد خمس ساعات ② بعده عندما تصبح سرعته صفر

① $S(t)=t^2-20t+120$

$v(t)=2t-20$

$v(5)=2(5)-20=-10$ كم/ساعة

② عندما السرعة = صفر لنجد t

$v(t)=2t-20$

$0=2t-20$

$20=2t \rightarrow t=10$ نعوض في المعادلة الاصلية

$S(10)=(10)^2-20(10)+120$

$=100-200+120$

$=20$ كم

مثال ③ جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان بعده بالامتار والزمن بالثواني معطى بالعلاقة $S(t)=\sqrt{2t^2+18}$ احسب بُعده عندما تصبح السرعة (1 م/ثا)

$S(t)=(2t^2+18)^{\frac{1}{2}}$

$v(t)=\frac{1}{2}(2t^2+18)^{-\frac{1}{2}}(4t)$

$v(t)=\frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}}$ عند $v(t)=1$

$1=\frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}}$

$\sqrt{2t^2+18}=2t$ بتربيع الطرفين

$$2t^2+18=4t^2$$

$$4t^2-2t^2-18=0$$

$$2t^2-18=0 \qquad \div 2$$

$$t^2-9=0$$

$$t^2=9$$

$$t=3$$

$$S(t)=\sqrt{2t^2+18}$$

$$S(3)=\sqrt{2(3)^2+18}=\sqrt{18+18}=\sqrt{36}=6$$ متر

مثال (4) جسم يتحرك على خط مستقيم حسب العلاقة $S(t)=\sqrt{2t+1}$

جد بعده عندما سرعته $\frac{1}{3}$ م/ثا

$$S(t)=(2t+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$v(t)=\frac{1}{2}(2t+1)^{-\frac{1}{2}}(2)$$

$$v(t)=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{\sqrt{2t+1}} \Rightarrow \sqrt{2t+1}=3$$ بتربيع الطرفين

$$2t+1=9$$

$$2t=9-1$$

$$2t=8 \Rightarrow t=4$$

$$S(t)=\sqrt{2t+1}$$

$$S(4)=\sqrt{2(4)+1}=\sqrt{9}=3$$ متر

اذا مررت بوردة جلبت انتباهك او بمنظر اثار احاسيسك فتوقف قليلاً

حتى تمتلك من ذلك بهجة

وزاري 2006

مثال (5) اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t)=t^3-6t^2+9t+7$ بعده بالامتار والزمن بالثواني احسب

ⓐ بعد الجسم عن نقطة بداية الحركة عندما تصبح السرعة صفر

ⓑ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 التعجيل صفر

ⓐ

$$s(t)=t^3-6t^2+9t+7$$

$$v(t)=3t^2-12t+9=0 \quad \div 3$$

$$t^2-4t+3=0$$

$$(t-3)(t-1)=0$$

(اما) $t-3=0 \Rightarrow t=3$ نعوض في الدالة الاصلية

$$s(3)=(3)^3-6(3)^2+9(3)+7$$

$$=27-54+27+7$$

$$=7 \text{ متر}$$

(او) $t-1=0 \Rightarrow t=1$ نعوض في المعادلة الاصلية

$$s(t)=(1)^3-6(1)^2+9(1)+7$$

$$=1-6+9+7$$

$$=11 \text{ متر}$$

ⓑ

$$v(t)=3t^2-12t+9$$

$$a(t)=6t-12=0 \quad \div 6$$

$$t-2=0$$

$t=2$ نعوض في الدالة الاصلية

$$S(2)=(2)^3-6(2)^2+9(2)+7$$

$$=8-24+18+7$$

$$=9 \text{ متر}$$

اختلط دائماً بالمتفائلين من الناس واهرب من المتشائمين فأنهم سوف يثيرون فيك الاشجان ولا احد يجب ان يستمع الى شكاوى الآخرين حيث ان لديه مايكفيه

مثال ⑥ قذف جسم نحو الاعلى من سطح الارض بازاحة معطاة وفق العلاقة $S(t)=96t-16t^2$ حيث الازاحة بالامتار والزمن بالثواني

احسب ① سرعة الجسم بعد ثانيتين

② اقصى ارتفاع يصله الجسم

①
$$S(t)=96t-16t^2$$
$$v(t)=96-32t$$
$$v(2)=96-32(2)$$
$$=96-64$$
$$=32 \quad \text{م/ثا}$$

ملاحظة/ عندما يصل الجسم الى اعلى نقطة تصبح سرعته صفر

②
$$v(t)=96-32t=0$$
$$96=32t$$
$$t=\frac{96}{32}=3$$

$$S(3)=96(3)-16(3)^2$$
$$=288-144$$
$$=144 \quad \text{متر}$$

ان كل صباح يمكن ان يكون خير بالنسبة إليك فلماذا تعكر صفوه بالتشاؤم

(صبحك الله بالخير)

بعض تطبيقات المشتقة في الاقتصاد

$C(x)$ هي داله التكلفة الكلية

$C'(x) = MC$
داله الكلفة الحدية

$\frac{C(x)}{x} = AC$
داله معدل الكلفة

$\frac{d}{dx}(AC)$ داله معدل الكلفة الحدية

$\frac{d}{dx}(A) = 0 \Rightarrow$ نجد x حجم الانتاج

مثال ① لتكن داله الكلفة الكلية $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ جد
ⓐ داله الكلفة الحدية
ⓑ داله معدل الكلفة

ⓐ

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

$$M(C) = x - 2$$

ⓑ

$$AC = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5}{x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{5}{x}$$

$$AC = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{5}{x}$$

الدعابة نافعة لازالة التوتر واشاعة المرح ولكسب الثواب في الآخرة
(مزاح المؤمن عبادة)

مثال ② لنفرض ان دالـــه الكلفه الكليه الانتاج ســلعه ما

هـ $C(x) = 3x^2 - 60x + 1200$

ⓐ دالــه الكلفه الكليه

ⓑ دالــه معدل الكلفه

ⓒ دالــه معدل الكلفه الحديه

ⓓ حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفه

$C(x) = 3x^2 - 60x + 1200$

ⓐ $m(x) = 6x - 60$

ⓑ $Ac = \frac{C(x)}{x} = \frac{3x^2 - 60x + 1200}{x}$

$Ac = \frac{3x^2}{x} - \frac{60x}{x} + \frac{1200}{x}$

$Ac = 3x - 60 + \frac{1200}{x}$

ⓒ $\frac{d}{dx}(Ac) = 3 - 0 + \frac{x(0) - 1200(1)}{x^2}$

$= 3 + \frac{-1200}{x^2}$

$\frac{d}{dx}(Ac) = 3 - \frac{1200}{x^2}$

ⓓ اضرب $) x^2$

$3 - \frac{1200}{x^2} = 0$

$3x^2 - 1200 = 0 \quad \div 3$

$x^2 - 400 = 0$

$x^2 = 400$

$x = 20$

الكلفه الكليه = نعوض قيمه x في الداله الاصليه

$C(20) = 3(20)^2 - 60(20) + 1200$

$= 3(400) - \cancel{1200} + \cancel{1200}$

$= 1200$

مناطق التزايد والتناقص والنهايات

طريقة الحل / ① نشتق ونصفر

② نجد قيمة x بأحسن طرق التحليل

③ نعوض قيمة x في الدالة الاصلية لنجد f(x) أو y فنحصل على نقطة حرجة

④ نختبر قيم x على خط الاعداد اعتماداً على اشارة المشتقة

⑤ نجد نوع النقطة الحرجة (عظمى أو صغرى أو مجرد حرجة) ثم نكتب مناطق التزايد والتناقص .

امثلة / جد مناطق التزايد والتناقص والنهايات إن وجدت

مثال ① $f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 \quad \div 3$

$x^2 - 1 = 0$

$(x-1)(x+1) = 0$

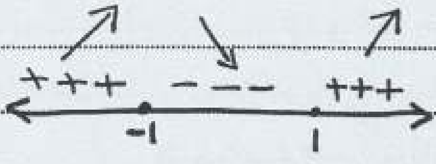
إما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \longrightarrow f(1) = (1)^3 - 3(1)$

$= 1 - 3 = -2 \Rightarrow (1, -2)$ نقطة حرجة

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)$

$= -1 + 3$

$= 2 \Rightarrow (-1, 2)$ نقطة حرجة



$f'(x) = 3x^2 - 3$

توضيح

اذن $(-1, 2)$ نهاية عظمى

$(1, -2)$ نهاية صغرى

مناطق التزايد = $\{x : x > 1\}$, $\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص = $(-1, 1)$

$f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9$ موجب | $f'(0) = -3$ سالب | $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9$ موجب

سالم البغدادي

مثال ②

$$f(x) = (x-2)^3 + 1$$

$$\acute{f}(x) = 3(x-2)^2$$

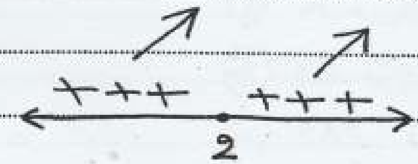
$3(x-2)^2 = 0$ ÷3

$(x-2)^2 = 0$ بجذر الطرفين

$x - 2 = 0$ ∴

$x = 2 \Longrightarrow f(2) = (2-2)^3 + 1$

$= 1 \Longrightarrow (2,1)$



$\acute{f}(x) = 3(x-2)^2$ نقطة حرجة

$\acute{f}(0) = 3(0-2)^2 = 12$ موجب

$\acute{f}(3) = 3(3-2)^2 = 3(1)^2 = 3$ موجب

اذنه لا توجد نهايات مناطق التزايد $= R \setminus \{2\}$

مثال ③

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$$

وزاري 2005

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$3x^2 - 6x - 9 = 0$ ÷3

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

(1) $x - 3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 3} \Longrightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 7$

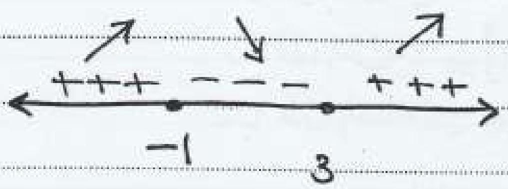
$= 27 - 27 - 27 + 7$

$= -20 \Longrightarrow (3,-20)$ نقطة حرجة

(2) $x + 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = -1} \Longrightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7$

$= -1 - 3 + 9 + 7$

$= 12 \Longrightarrow (-1,12)$ نقطة حرجة



$(3,-20)$ نهاية صغرى

$(-1,12)$ 〃 عظمى

مناطق التناقص $= (-1,3)$ ، مناطق التزايد $\{x : x > 3\}$ و $\{x : x < -1\}$

واجب/ ① $f(x)=x^3$ الجواب: ← +++ ↗ +++ ↗ →

② $f(x)=x^4-1$ الجواب: ← − ↘ ++ ↗ →

مثال ④ $f(x)=x^4-2x^2+1$

وزاري 2003

$f'(x)=4x^3-4x$

$4x^3-4x=0 \quad \div 4$

$x^3-x=0$

$x(x^2-1)=0$

$x(x-1)(x+1)=0$

(اما) $x=0 \Rightarrow f(0)=(0)^4-2(0)^2+1=1 \Rightarrow (0,1)$ نقطة حرجة

(او) $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=(1)^4-2(1)^2+1=1-2+1=0 \Rightarrow (1,0)$ //

(او) $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^4-2(-1)^2+1=1-2+1=0 \Rightarrow (-1,0)$ //

↘ ↗ ↘ ↗

← − − − +++ − − − +++ → $f'(x)$ /

−1   0   1

$(-1,0)$ نهاية صغرى

$(0,1)$ // عظمى

$(1,0)$ نهاية صغرى

توضيح

مناطق التزايد = $\{x: x>1\}$, $(-1,0)$

مناطق التناقص = $\{x: x<-1\}$, $(0,1)$

توضيح

$f'(x)=4x^3-4x$

$f'(-2)=4(-2)^3-4(-2)=-32+8=-24$ سالب

$f'(\frac{-1}{2})=4(\frac{-1}{2})^3-4(\frac{-1}{2})=4(\frac{-1}{8})+2=\frac{-1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2}$ موجب

$f'(\frac{1}{2})=4(\frac{1}{2})^3-4(\frac{1}{2})=4(\frac{1}{8})-2=\frac{1}{2}-\frac{2}{1}=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$ سالب

$f'(2)=4(2)^3-4(2)=32-8=24$ موجب

النظرة المتفائلة للامور تحفز العقل الباطن على الاحتفاظ بقوته وتحفز العقل الواعي الى العمل

لذا قال علي (ع) (تفائل بالخير تنجح)

مثال ⑤ $y = 2x^2 + 4x - 1$

تمهيدي 2011

$y' = 4x + 4$

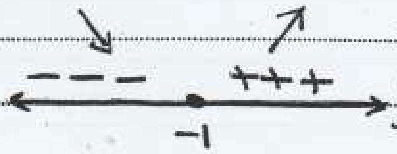
$4x + 4 = 0 \quad \div 4$

$x + 1 = 0$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 1$

$= 2 - 4 - 1$

$= -3$



y' نقطة حرجة $(-1, -3)$

توضيح

$(-1, -3)$ نقطة نهاية صغرى

مناطق التناقص = $\{x : x < -1\}$

مناطق التزايد = $\{x : x > -1\}$

توضيح

$y' = 4x + 4$

موجب $y'(0) = 4(0) + 4 = 4$ | سالب $y'(-2) = 4(-2) + 4 = -8 + 4 = -2$

واجب/ ① $f(x) = 5 + 4x^3 - x^4$ الجواب



② $f(x) = (x - 2)^2 + 4$ الجواب



غسل الثياب يذهب بالهم والحزن ومن وجد هماً فلا يدري ما هو

فليغسل رأسه (أمير المؤمنين (ع) في تفسير المعنى)

مثال (6) جد مناطق التزايد والتناقص والنهايات إن وجدت للدالة

$$f(x) = x^3(-4+x)$$

$f(x) = -4x^3 + x^4$

$\acute{f}(x) = -12x^2 + 4x^3$

$-12x^2 + 4x^3 = 0 \quad \div 4$

$-3x^2 + x^3 = 0$

$x^2(-3+x) = 0$

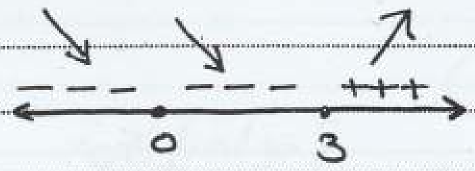
اما $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^3(-4+0) = 0$

$(0,0)$ نقطة حرجة

او $-3+x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f(3) = (3)^3(-4+3)$

$= 27(-1) = -27$

$(3,-27)$ نقطة حرجة مرشحة



$\acute{f}(x) = -12x^2 + 4x^3$ توضيح

$\therefore (3,-27)$ نهاية صغرى

مناطق التزايد $\{x : x > 3\}$

مناطق التناقص $(0,3)$, $\{x : x < 0\}$

توضيح

$\acute{f}(x) = -12x^2 + 4x^3$

$\acute{f}(-1) = -12(-1)^2 + 4(-1)$

$= -12 - 4 = -16$ سالب

$\acute{f}(1) = -12(1)^2 + 4(1)^3$

$= -12 + 4 = -8$ سالب

$\acute{f}(4) = -12(4)^2 + 4(4)^3$

$= -12(16) + 4(64)$

$= -192 + 256 = 64$ موجب

الشمس تشرق كل يوم بنور جديد وأمل جديد فلماذا لا نستقبل رحمة الله تعالى فيه بقلب مفعم بالأمل.

ثوابت على المشتقة الاولى

(نلاحظ في السؤال كلمة نقطة حرجة أو نهاية محلية أو نهاية عظمى أو نهاية صغرى)

الحالة الاولى (عندما x معلومة)

طريقة الحل / نشتق نعوض قيمة x ونصفر أي ($f'(x)=0$)

مثال ① اذا كانت الدالة $f(x)=x^2+ax$ لها نهاية محلية عند $x=-2$ جد قيمة a وبين نوع النهاية

(طريقة الحل $f'(-2)=0$)

$f(x)=x^2+ax$

$f'(x)=2x+a$

$f'(-2)=2(-2)+a$

$-4+a=0 \rightarrow a=4$

نوع النهاية؟

(نختبر قيمة x على خط الاعداد)

$f'(x)=2x+4$

خط الاعداد: ـــ ـــ ـــ (تناقص ↘) قبل -2 ، +++ (تزايد ↗) بعد -2

اذن النقطة نهاية صغرى

مثال ② اذا كانت $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ تمثل نهاية صغرى عند $x=1$ جد قيمة a

(طريقة الحل $f'(1)=0$)

$f'(x)=2x+\frac{x(0)-a(1)}{x^2}$

$f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}$

$f'(1)=2(1)-\frac{a}{(1)^2}$

$2-a=0$

$a=2$

ليكن عمل بسيط لعله يفتح آفاقاً للقيام باعمال أخرى

الحالة الثانية / اذا كانت (x,y) معلومة

طريقة الحل ① $f'(x) = 0$

② (x,y) تحقق المعادلة

مثال ① اذا علمت ان (2,1) نهاية صغرى محلية للدالة $f(x) = a + (x-b)^2$

جد قيمة a, b

① $f'(2) = 0$

$f(x) = a + (x-b)^2$

$f'(x) = 2(x-b)$

$f'(2) = 2(2-b)$

$2(2-b) = 0 \quad \div 2$

$2 - b = 0 \rightarrow \boxed{b = 2}$

② (2,1) تحقق المعادلة الاصلية

$f(x) = a + (x-2)^2$

$1 = a + \underbrace{(2-2)^2}_{\text{صفر}} \Rightarrow \boxed{a = 1}$

كتاب

مثال ② اذا كانت (1,4) نقطة حرجة للدالة $f(x) = 3 + ax + bx^2$

فما قيمة a, b وما نوع النقطة الحرجة

① $f'(1) = 0$

$f'(x) = a + 2bx$

$f'(1) = a + 2b(1)$

$a + 2b = 0 \sim ①$

② (1,4) تحقق المعادلة

$f(x) = 3 + ax + bx^2$

$4 = 3 + a(1) + b(1)^2$

$4 = 3 + a + b$

$4 - 3 = a + b$

$1 = a + b$

$a + b = 1 \sim ②$

سالم البغدادي

لمعرفة نوع النهاية نختبر قيمة x على خط الاعداد على اشارة المشتقة

$a+2b=0$ —— ①

$\mp a \mp b = \mp 1$ —— ②

بالطرح

$b=-1$

نعوض في ① $a+2(-1)=0$

$a-2=0 \Rightarrow a=2$

نوع النقطة

$f'(x) = a+2bx$ ($a=2$, $b=-1$)

$f'(x) = 2-2x$

$+ + + + +$ ↗ $x=1$ ↘ $- - -$

توضيح موجب $f'(0)=2$

سالب $f'(2)=2-4=-2$

نهاية عظمى $(1,1)$

مثال ③ اذا كانت $f(x)=ax^3+bx$ وكانت $f(x)$ تمتلك نهاية محلية عند $(1,-2)$ فما قيمة كل من (a,b) وما نوع هذه النهاية

بما ان $(1,-2)$ نهاية اذنه

① $f'(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+b$

$f'(1)=3a(1)^2+b$

$3a+b=0$ —— ①

② $(1,-2)$ تحقق المعادلة ($x=1$, $y=-2$)

$f(x)=ax^3+bx$

$-2=a(1)^3+b(1)$

$-2=a+b \rightarrow a+b=-2$ —— ②

$\mp 3a \mp b=0$ —— ①

بالطرح

$-2a=-2 \Rightarrow a=1$

نعوض في ① $3a+b=0$

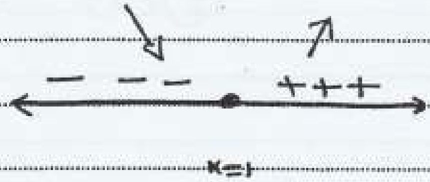
$3(1)+b=0$

$3+b=0 \Rightarrow b=-3$

نوع النهاية

$f'(x) = 3ax^2 + b$ (a = 1, b = −3)

$f'(x) = 3x^2 - 3$



∴ (1, −2) نهاية صغرى محلية

التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

بنفس الطريقة التي تعاملنا فيها مع المشتقة الأولى نجري على المشتقة الثانية أي

① $f''(x) = 0$ ونجد قيم x ونعوض في الدالة الأصلية فتكون نقطة مرشحة للانقلاب

② نجد اشارة f'' باستخدام خط الأعداد

③ تكون النقطة الفاصلة بين مناطق التقعر والتحدب هي نقطة الانقلاب

أمثلة / جد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب للدوال

① $f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

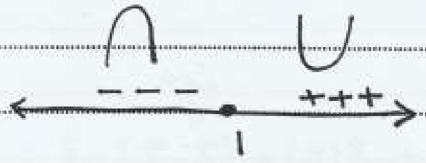
$6x - 6 = 0 \quad \div 6$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \longrightarrow y = f(1) = (1)^3 - 3(1)^2$

$= 1 - 3$

$= -2$

(1, −2) نقطة مرشحة للانقلاب



$f''(x) = 6x - 6$

توضيح / سالب $f''(0) = 6(0) - 6 = -6$

موجب $f''(2) = 12 - 6 = 6$

اذن (1, −2) نقطة انقلاب

مناطق التحدب = $\{x : x < 1\}$

مناطق التقعر = $\{x : x > 1\}$

البابلية حضارة لكن الصفر حينما يوضع الى جانبه رقم واحد يصبح عشرة ومائة وألف

سالم البغدادي

مثال ② $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

$\bar{f}(x) = 4x - 4$

$\bar{\bar{f}}(x) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ لا توجد نقاط انقلاب

توضيح /

$\bar{\bar{f}}(1) = 4$ $\qquad$ $\longleftrightarrow$ + + + ∪ + + + $\bar{\bar{f}}(x) = 4$

$\bar{\bar{f}}(3) = 4$ $\qquad$ الدالة مقعرة أو مناطق التقعر $= R$

مثال ③ $f(x) = x^4$

$\bar{f}(x) = 4x^3$

$\bar{\bar{f}}(x) = 12x^2 = 0 \quad \div 12$

$x^2 = 0$ بجذر الطرفين

$x = 0 \rightarrow f(0) = (0)^4 = 0$

∪ + + + (تقعر) ● 0 ∪ + + + (تقعر) $\bar{\bar{f}}(x) = 12x^2$ $\qquad$ $(0, 0)$ نقطة مرشحة للانقلاب

مناطق التقعر $R \setminus \{0\}$

مثال ④ كتاب $f(x) = (x-2)^3 + 3$

$\bar{f}(x) = 3(x-2)^2$

$\bar{\bar{f}}(x) = 6(x-2)$

$6(x-2) = 0 \quad \div 6$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = (2-2)^3 + 3$ (صفر)

$y = f(2) = 3$

∩ − − − (تحدب) ● 2 ∪ + + + (تقعر) $\bar{\bar{f}}(x) = 6(x-2)$ $\qquad$ $(2, 3)$ نقطة مرشحة للانقلاب

اذن $(2, 3)$ نقطة انقلاب

مناطق التحدب $= \{x : x < 2\}$

مناطق التقعر $= \{x : x > 2\}$

مثال ⑤ كتاب

$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$

$f'(x)=3x^2-6x+3$

$f''(x)=6x-6$

$6x-6=0 \quad \div 6$

$x-1=0$

$x=1 \rightarrow f(1)=(1)^3-3(1)^2+3(1)+1$

$=1-3+3+1$

$=2$

$\cap$ $- - -$ تحدب | 1 | $+ + +$ تقعر $\cup$ $\rightarrow f''(x)=6x-6$

$(1,2)$ نقطة مرشحة للانقلاب

اذن $(1,2)$ هي نقطة انقلاب

مناطق التقعر = $\{x : x>1\}$

مناطق التحدب = $\{x : x<1\}$

مثال ⑥ وزاري 2008 د

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$

$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot 4x^3-\frac{3}{2}\cdot 2x$

$f'(x)=x^3-3x$

$f''(x)=3x^2-3$

$3x^2-3=0 \quad \div 3$

$x^2-1=0$

$(x-1)(x+1)=0$

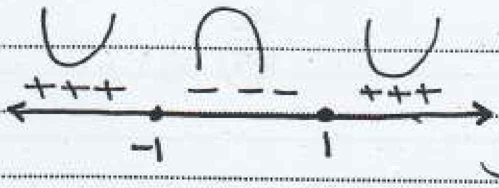
اما $x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow f(1)=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=\frac{2-12}{8}=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}$

$(1,\frac{-5}{4})$ نقطة مرشحة للانقلاب

او $x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow f(-1)=\frac{1}{4}(-1)^4-\frac{3}{2}(-1)^2$

$=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=\frac{2-12}{8}=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}$

$(-1,\frac{-5}{4})$ نقطة مرشحة للانقلاب



$f''(x) = 3x^2 - 3$

اذن $(1, \frac{-5}{4})$ و $(-1, \frac{-5}{4})$ نقاط انقلاب

مناطق التحدب $= (-1, 1)$

مناطق التقعر $= \{x : x > 1\}$ ، $\{x : x < -1\}$

وزاري 2008/1

مثال (7) جد مناطق التقعر والتحدب ونقط الانقلاب للدالة

$f(x) = x^4 - 24x^2 + 4$

$f'(x) = 4x^3 - 48x$

$f''(x) = 12x^2 - 48$

$12x^2 - 48 = 0 \quad \div 12$

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

اما $x - 2 = 0$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = (2)^4 - 24(2)^2 + 4$

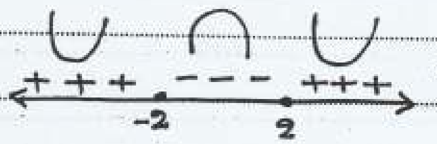
$= 16 - 24(4) + 4$

$= 16 - 96 + 4 = -76 \Rightarrow (2, -76)$ مرشح للانقلاب

او $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 24(-2)^2 + 4$

$= 16 - 96 + 4 = -76$

مرشح للانقلاب $(-2, -76)$



$f''(x) = 12x^2 - 48$

اذنه $(2, -76)$ و $(-2, -76)$ نقاط انقلاب

مناطق التحدب $(-2, 2)$

مناطق التقعر $\{x : x > 2\}$ و $\{x : x < -2\}$

الانجراف مع التيار سهل مغرياً والبديل هو التوقف والتجديف في الاتجاه المعاكس

ثوابت على المشتقة الثانية

(يذكر في السؤال كلمة نقطة انقلاب)

الحالة الأولى / عندما قيمة x معلومة

طريقة الحل / $f''(x) = 0$

أي نشتق المشتقة الثانية ونعوض قيمة x ونصفر

مثال ① اذا كانت الدالة $f(x) = x^3 - ax^2$ تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمة a

طريقة الحل $f''(1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 2ax$

$f''(x) = 6x - 2a$

$f''(1) = 6(1) - 2a$

$6 - 2a = 0 \Rightarrow 6 = 2a \xrightarrow{\text{قسمة } 2} a = 3$

وزاري 2002 مثال ② اذا كانت $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + 7$ تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمة a ثم جد نقطة الانقلاب

طريقة الحل $f''(1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''(1) \quad 6(1) + 2a$

$6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \qquad \div 2$

$a = -3$

لايجاد نقطة الانقلاب نعوض $x = 1$ في الدالة الاصلية ($a = -3$)

$f(1) = (1)^3 + a(1)^2 - 9(1) + 7$

$= 1 - 3 - 9 + 7$

$= -4 \longrightarrow$ اذن نقطة الانقلاب هي $(1, -4)$

الحالة الثانية / عندما يعطي في السؤال نقطة الانقلاب كاملة (x,y)

فأن ① $f''(x)=0$

② (x,y) تحقق المعادلة

مثال ③ اذا كانت $y=ax^3+2bx^2+4$ تمتلك نقطة انقلاب $(-1,5)$ جد قيمة a,b

طريقة ① $f''(-1)=0$

$y'=3ax^2+4bx$

$y''=6ax+4b$

$f''(-1)=6a(-1)+4b$

$-6a+4b=0 \quad \div 2$

$-3a+2b=0$ ---- ①

② $(-1,5)$ تحقق المعادلة

$y=ax^3+2bx^2+4$

$5=a(-1)^3+2b(-1)^2+4$

$5=-a+2b+4$

$5-4=-a+2b$

$1=-a+2b \Rightarrow -a+2b=1$ ---- ②

$\pm 3a \mp 2b=0$ ---- ①

$2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

نعوض في ① $-3a+2b=0$

$-3(\frac{1}{2})+2b=0$

$\frac{-3}{2}+2b=0$

$2b=\frac{3}{2}$

$b=\frac{3}{4}$

رسم الدوال

لكي نرسم اي دالة نتبع الخطوات التالية

① نجد نقاط التقاطع مع المحورين بأن نفرض $x=0$ (ان امكن) في المعادلة الاصلية لنجد y ثم نفرض $f(x)=y=0$ لنجد قيم x

② نعين مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونحدد نوع النقط الحرجة

③ نعين مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

④ نجد نقاط اضافية اذا احتجنا اليها

مثال ① ارسم منحني الدالة $f(x)=x^2+4x+3$

① نقاط التقاطع مع المحاور

Let $x=0 \Rightarrow f(x)=(0)^2+4(0)+3=3 \Rightarrow (0,3)$

Let $y=0$ $\quad x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

اما $x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow (-3,0)$

او $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \rightarrow (-1,0)$

② النهايات

$f(x)=x^2+4x+3$

$f'(x)=2x+4=0 \quad \div 2$

$x+2=0$

$x=-2$

$y=f(-2)=(2)^2+4(-2)+3=$

$4-8+3=-1 \Rightarrow (-2,-1)$ حرجة

$f'(0)=4$ موجبة $\quad$ $- - - \searrow \; -2 \; \nearrow + + +$ $\quad f'(x)=2x+4$

$f'(-3)=2(-3)+4=-2$ سالبة

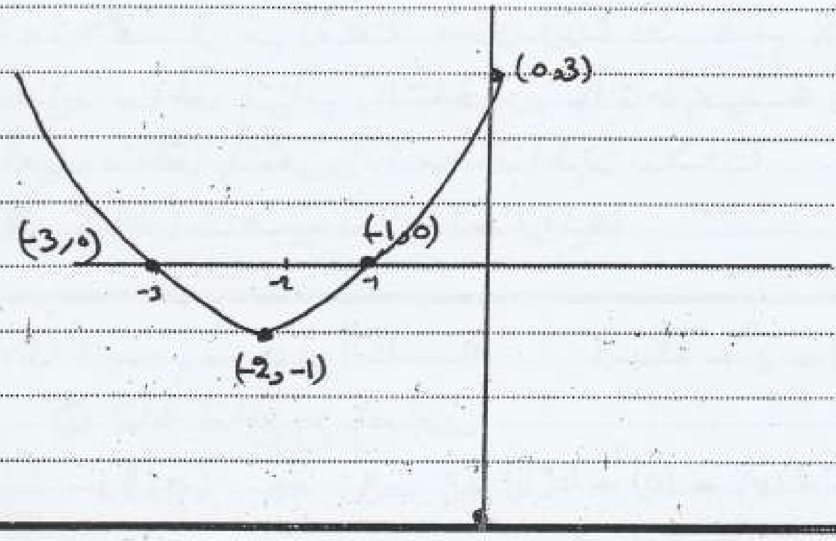
$(-2,-1)$ نهاية صغرى محلية مناطق التزايد $=\{x : x>-2\}$

مناطق التناقص $=\{x : x<-2\}$

③ نقاط الانقلاب $\quad f''(x) = 2x + 4$

لا توجد نقاط انقلاب $\quad f'''(x) = 2 \neq 0$

مناطق التقعر $= R \quad f''(x)$: + + + + +



وزاري

2010 مثال ② ارسم منحني الدالة $f(x) = 3 - 2x - x^2$

① نقاط تقاطع مع المحاور

$\text{Let } x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 3 - 2(0) - (0)^2 = 3 \Rightarrow (0,3)$

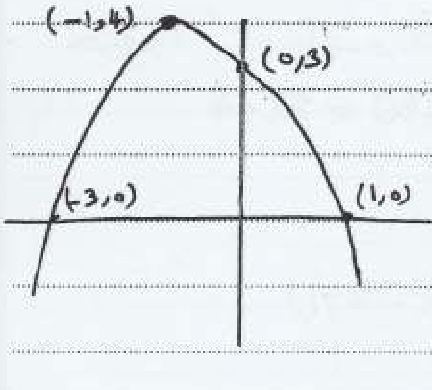
$\text{Let } y = 0 \Rightarrow 3 - 2x - x^2 = 0$

$(1 - x)(3 + x) = 0$

إما $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \rightarrow (1,0)$

أو $3 + x = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3,0)$

② الغايات



$f(x) = 3 - 2x - x^2$

$f'(x) = -2 - 2x = 0$

$-2 = 2x$

$x = -1$

$f(-1) = 3 - 2(-1) - (-1)^2$

$= 3 + 2 - 1 = 4 \Rightarrow (-1,4)$ موجبة

↗ ↘

+++ (-1) - - - $f'(x) = -2-2x$

(-1,4) نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد = $\{x : x < -1\}$ | $f(-2) = -2-2(-2)$

$= -2+4 = 2$ موجب

مناطق التناقص = $\{x : x > -1\}$ | $f(0) = -2-2(0) = -2$ سالب

③ نقاط الانقلاب

$f'(x) = -2-2x$

لا توجد نقاط انقلاب $f''(x) = -2 \neq 0$

- - - - - - - $f''(x) = -2$

مناطق التحدب = R

2011

واجب/ ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الجواب/ (4,16) نهاية صغرى ، (2,20) نهاية عظمى

اللهم بارك لنا في الخبز ولا تفرق بيننا وبينه فلولا الخبز ما صمنا ولا صلينا ولا ادينا فرائض ربنا عز وجل (حديث نبوي)

مثال ③ ارسم منحني الدالة $f(x)=x^3-3x$

① نقاط التقاطع مع المحاور

Let $x=0 \Rightarrow y=f(0)=(0)^3-3(0)=0$

$(0,0)$

Let $y=0 \Rightarrow x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$

اما $x=0 \Rightarrow (0,0)$

او $x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow x=\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3},0)$

او $x+\sqrt{3}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{3} \Rightarrow (-\sqrt{3},0)$

② النهايات

$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3=0$

$x^2-1=0$

$x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$

$+++ \quad (-1) \quad --- \quad (1) \quad +++ \quad f'(x)$

اما $x=1 \Rightarrow f(1)=(1)^3-3(1)=1-3=-2 \Rightarrow (1,-2)$

او $x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^3-3(-1)=-1+3=2 \Rightarrow (-1,2)$

نقاط حرجة $\Leftarrow$ $(-1,2)$ نهاية عظمى محلية

$(1,-2)$ نهاية صغرى محلية.

مناطق التزايد = $\{x : x<-1\}$ ، $\{x : x>1\}$

مناطق التناقص = $(-1,1)$

③ نقاط الانقلاب

$f'(x)=3x^2-3$

$f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$

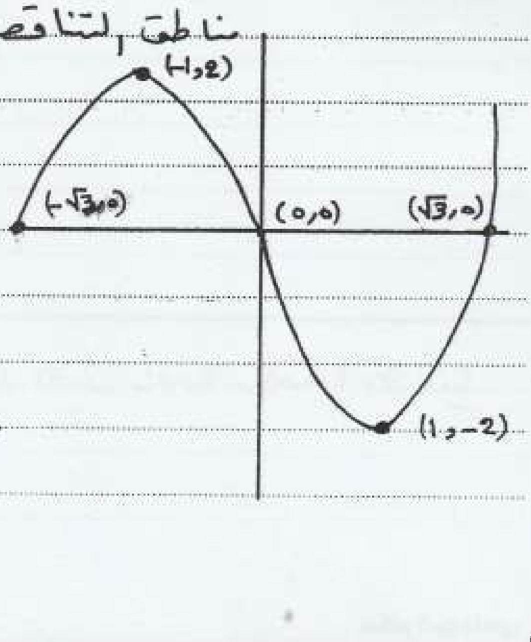
$f(0)=(0)^3-3(0)=0 \Rightarrow (0,0)$

مرشح للانقلاب

$--- \quad (0) \quad +++ \quad f''(x)=6x$

$\therefore (0,0)$ نقطة انقلاب مناطق التقعر = $\{x : x>0\}$

مناطق التحدب = $\{x : x<0\}$



مثال ④ ارسم الدالة $f(x)=(x-1)^3$

وزاري 2003 2004

① نقاط تقاطع مع المحاور

Let $x=0 \Rightarrow f(0)=(0-1)^3=(-1)^3=-1 \Rightarrow (0,-1)$

Let $y=0 \Rightarrow (x-1)^3=0$

$x-1=0$

$x=1 \Rightarrow (1,0)$

② النهايات

$f(x)=(x-1)^3$

$f'(x)=3(x-1)^2=0 \quad \div 3$

$(x-1)^2=0$ بجذر الطرفين

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$y=f(1)=(1-1)^3=0 \Rightarrow (1,0)$ حرجة



$f'(x)=3(x-1)^2$

توضيح

$f'(2)=3(2-1)^2$

$=3$ موجبة

$f'(0)=3(0-1)^2$

$=3$ موجبة

مناطق التزايد = $R\setminus\{1\}$

③ نقاط الانقلاب $f'(x)=3(x-1)^2$

$f''(x)=6(x-1)=0 \quad \div 6$

$x-1=0$

$x=1$

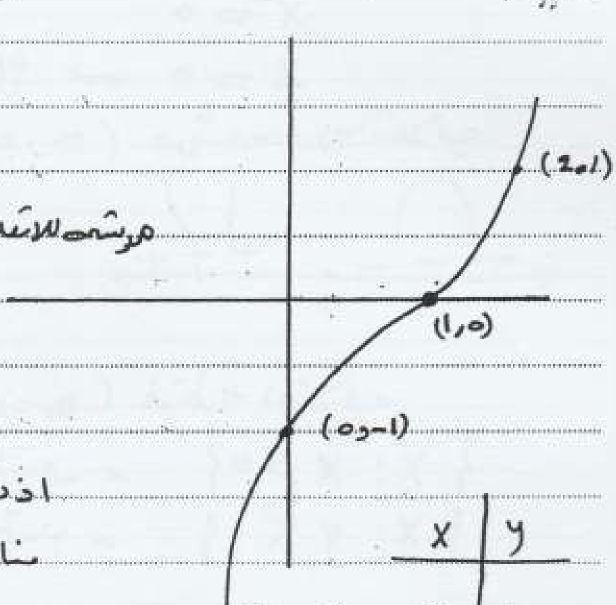
$f(1)=(1-1)^3=0 \Rightarrow (1,0)$ مرشحة للانقلاب



اذن $(1,0)$ نقطة انقلاب

مناطق التحدب = $\{x : x<1\}$

" التقعر = $\{x : x>1\}$



x	y
2	1
-1	-8

$f(2)=(2-1)^3=1$

$f(-1)=(-1-1)^3=(-2)^3=-8$

2010 تمهيدي

مثال ⑤ ارسم منحني الدالـــه $f(x) = x^5$

① نقاط التقاطع

Let $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = (0)^5 = 0 \Rightarrow (0,0)$

Let $y = 0 \Rightarrow x^5 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

② الغايات

$f(x) = x^5$

$\acute{f}(x) = 5x^4$

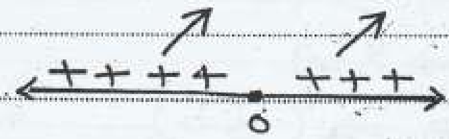
$5x^4 = 0 \Rightarrow \div 5$

$x^4 = 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ نقطه حرجه

$\acute{f}(1) = 5(1)^4$ موجب

$\acute{f}(-1) = 5(-1)^4 = 5$ موجب



$\acute{f}(x) = 5x^4$

مناطق التزايد $R \setminus \{0\}$

③ نقاط الانقلاب

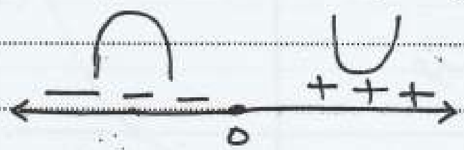
$\acute{f}(x) = 5x^4$

$\acute{\acute{f}}(x) = 20x^3 = 0$

$x^3 = 0$

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

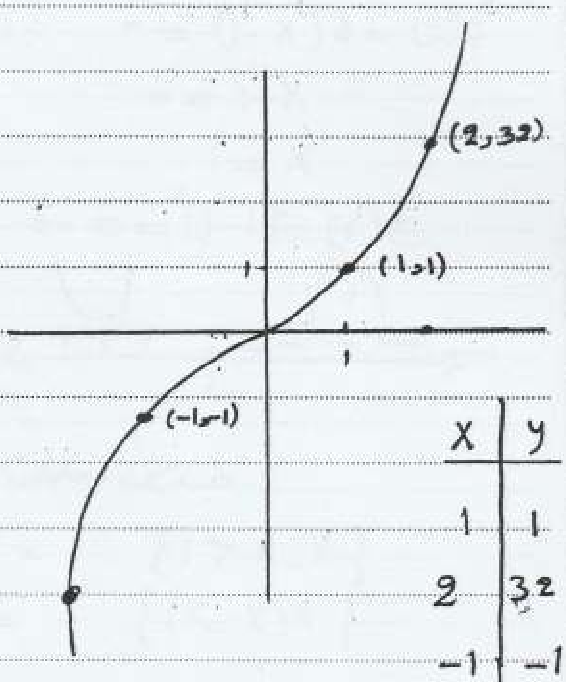
$(0,0)$ مرشحه للانقلاب



$(0,0)$ نقطه انقلاب

مناطق التقعر $= \{x : x > 0\}$

مناطق التحدب $= \{x : x < 0\}$



X	y
1	1
2	32
-1	-1
-2	-32

تمارين

مثال (6) ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

(1) نقاط التقاطع (0,1) ← $f(0) = (0)^3 - 2(0)^2 + 1 = 1$ ⟸ Let $x = 0$

لا يمكن ايجاد لصعوبة الحل $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ ⟸ Let $y = 0$

(2) النهايات

$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$

$x(3x - 4) = 0$

إما $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$ حرجة

أو $3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$f(\frac{4}{3}) = (\frac{4}{3})^3 - 2(\frac{4}{3})^2 + 1$

$= \frac{64}{27} - \frac{32}{9} + 1 = \frac{64 - 96 + 27}{27} = \frac{91 - 96}{27} = \frac{-5}{27}$

حرجة $(\frac{4}{3}, \frac{-5}{27})$

$+ + + + +$ (0) $- - -$ ($\frac{4}{3}$) $+ + +$

(0,1) نهاية عظمى

$(\frac{4}{3}, \frac{-5}{27})$ نهاية صغرى

مناطق التزايد $= \{x : x < 0\}$ و $\{x : x > \frac{4}{3}\}$

مناطق التناقص $= (0, \frac{4}{3})$

(3) نقاط الانقلاب

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f''(x) = 6x - 4 = 0$

$6x = 4$

$x = \frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + 1$

$= \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{8 - 24 + 27}{27} = \frac{11}{27}$

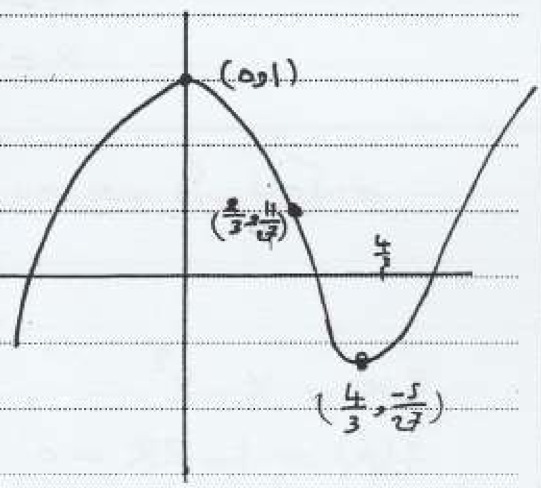
$(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ مرشحة للانقلاب

$- - - -$ ($\frac{2}{3}$) $+ + +$

اذن $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ نقطة انقلاب

مناطق التحدب $= \{x : x < \frac{2}{3}\}$

مناطق التقعر $= \{x : x > \frac{2}{3}\}$



سالم البغدادي

تطبيقات على الغايات العظمى والصغرى

لحل المسائل

① نرسم شكل توضيحي للمسألة مع تعيين الابعاد (في الامثلة التي تحتاج الى رسم)

② نكتب المعادلة (الدالة) من التعبير المرافق لعبارة (اكبر او اصغر ما يمكن)

③ اذا كانت المعادلة تحوي متغير واحد نشتق ونصفر لنجد قيمة المتغير

④ اذا كانت المعادلة تحوي متغيرين نجد علاقة بين المتغيرين ونعوض في المعادلة لتصبح ذات متغير واحد فنشتق ونصفر لنجد قيمة المتغير ثم نعوض بالعلاقة لنحصل على المتغير الآخر

ملاحظة / يمكن التأكد من النتائج عن طريق اختبار المشتقة الاولى على خط الاعداد

امثلة / ① جد العدد الذي عند اضافته الى مربعه يكون الناتج اقل ما يمكن

نفرض العدد $= x$

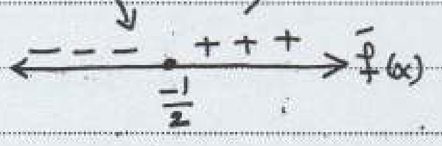
اذن مربعه $= x^2$

$f(x) = x + x^2$

$f'(x) = 1 + 2x = 0$

$2x = -1$

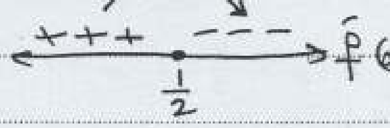
$x = \frac{-1}{2}$ العدد



مثال ② جد العدد الذي زيادته على مربعه اكبر ما يمكن

نفرض العدد $= x$

اذن مربعه $= x^2$



$f(x) = x - x^2$

$f'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$x+y=20$

③ جد عددين موجبين مجموعهما (20) اذا كان حاصل ضربهما اكبر ما يمكن

نفرض العدد الاول $= x$

نفرض العدد الثاني $= y$

$f(x) = xy$ (المعادلة)

$x+y=20 \Rightarrow y = 20-x$ العلاقة (نعوض العلاقة في الدالة)

$f(x) = x(20-x)$

$f(x) = 20x - x^2$

$f'(x) = 20 - 2x$

$20 - 2x = 0 \quad \div 2 \Rightarrow 10 - x = 0 \Rightarrow x = 10$

$x+y=20$ نعوض في العلاقة العدد الاول $= 10$

$10+y=20$

$y = 20-10 = 10$ العدد الثاني

$x+y=20$

④ جد عددين موجبين مجموعهما (20) اذا كان مجموع مربعيهما اصغر ما يمكن

نفرض العدد الاول $= x$

نفرض العدد الثاني $= y$

$f(x) = x^2 + y^2$ المعادلة

$x+y = 20 \Rightarrow y = 20-x$ العلاقة

$f(x) = x^2 + (20-x)^2$ نعوض العلاقة في الدالة

$f(x) = x^2 + 400 - 40x + x^2$

$f(x) = 2x^2 + 400 - 40x$

$f'(x) = 4x - 40$

$4x - 40 = 0 \quad \div 4 \Rightarrow x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \xrightarrow[\text{العلاقة}]{\text{نعوض في}} y = 10$

وزاري 2001 / جد عددين مجموعهما (12) ومجموع مربعيهما اصغر ما يمكن

وزاري 2002 / 〃 〃 〃 (16) وحاصل ضربهما اكبر ما يمكن

وزاري 2003 / 〃 〃 〃 (30) 〃 〃 〃 〃

⑤ جد عددين مجموعها (١٠) وحاصل ضرب مربع احدهما في مربع الآخر اكبر ما يمكن

نفرض العدد الاول $= x$

العدد الثاني $= y$

المعادلة $f(x) = x^2 y^2$

العلاقة $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

نعوض العلاقة في المعادلة

$f(x) = x^2 (10 - x)^2$

$f(x) = x^2 (100 - 20x + x^2)$

$f(x) = 100x^2 - 20x^3 + x^4$

$f'(x) = 200x - 60x^2 + 4x^3 = 0 \quad \div 4$

$50x - 15x^2 + x^3 = 0$

$x(50 - 15x + x^2) = 0$



$x(10 - x)(5 - x) = 0$

اما $x = 0$ يهمل

او $10 - x = 0 \Rightarrow x = 10$ يهمل (لانه لو كان الاول ١٠ ← الثاني = ٠)

او $5 - x = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 10 - x \Rightarrow y = 10 - 5 = 5$

---

⑥ جد عددين موجبين مجموعها (15) وحاصل ضرب مربع احدهما في مكعب الآخر اكبر ما يمكن

نفرض الاول $= x$

الثاني $= y$

العلاقة $x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$

$f(x) = x^3 y^2$

$f(x) = x^3 (15 - x)^2$

$f(x) = x^3 (225 - 30x + x^3)$

$f(x) = 225x^3 - 30x^4 + x^5$

$f'(x) = 675x^2 - 120x^3 + 5x^4 = 0 \quad \div 5$

$135x^2 - 24x^3 + x^4 = 0$

$x^2 (135 - 24x + x^2) = 0$

$x^2 (15 - x)(9 - x) = 0$

اما $x^2 = 0$ يهمل   او $15 - x = 0 \Rightarrow x = 15$ يهمل   او $9 - x = 0 \Rightarrow x = 9$ الاول

$y = 15 - 9$

العدد الثاني $y = 6$

(7) جد العدد الذي زيادة ثلاثة امثال مربعه على مكعبه اقل ما يمكن

نفرض العدد = x

ثلاث امثال مربعه = $3x^2$

مكعب العدد = x^3

$f(x) = 3x^2 - x^3$

$f'(x) = 6x - 3x^2$

$6x - 3x^2 = 0 \quad \div 3$

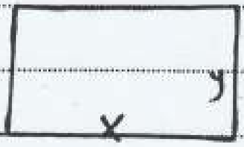
$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

اما $x = 0$ يهمل او $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

قوانين بعض الاشكال الهندسية

(1) المستطيل/



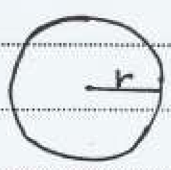
المساحة = الطول × العرض

$M = xy$

المحيط = 2(الطول + العرض)

$P = 2(x+y)$ او $P = 2x + 2y$

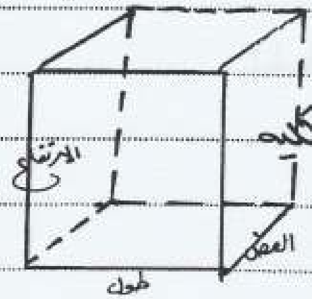
(2) الدائرة/



المساحة = πr^2

المحيط = $2\pi r$

(3) متوازي المستطيلات/



الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

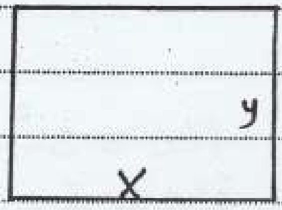
المساحة الكلية = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة قاعدتين

العلاقة   الدالة

امثلة/ ① جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $(100)\ cm$

نفرض الطول $= x$

العرض $= y$



المحيط = 2 (الطول + العرض)

$P = 2(x+y)$ ~~~ ① الدالة

(نلاحظ هناك متغيرين x و y لا بد من التخلص من احدهما عن طريق ايجاد العلاقة)

المساحة $\rightarrow 100 = xy \Rightarrow \boxed{y = \frac{100}{x}}$ —② العلاقة

نعوض ② في ①

$P = 2\left(x + \frac{100}{x}\right)$

$P' = 2\left(1 + \frac{x(0) - 100(1)}{x^2}\right)$

$P' = 2\left(1 - \frac{100}{x^2}\right) = 0 \qquad \div 2$

$1 - \frac{100}{x^2} = 0$

$1 = \frac{100}{x^2} \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

نعوض $x=10$ في المعادلة رقم ②

$y = \frac{100}{10} \rightarrow \boxed{y = 10}$

المطلوب ايجاد المحيط

المحيط $P = 2(x+y)$

$P = 2(10+10)$

$= 2(20)$

$= 40\ cm$

سالم الجنابي

كتاب وزاري

⑨ جد ابعاد اكبر مساحة مستطيل محيطه (40) متر

نفرض طول المستطيل = x

العرض = y

المساحة $m = xy$ —— ①

(بعدها نستخلص من احد المتغيرين نجد العلاقة معادلة رقم 2)

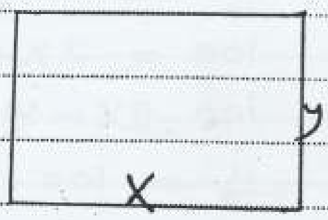
المحيط = 2(الطول + العرض)

$40 = 2(x+y) \quad \div 2$

$20 = x + y$

$20 - x = y$

العلاقة $y = 20 - x$ —— ②



نعوض ② في ①

$m = x(20 - x)$

$m = 20x - x^2$

$m' = 20 - 2x$

$20 - 2x = 0 \quad \div 2$

$10 - x = 0$

$x = 10$ متر

نعوض في معادلة رقم ② دائماً

$y = 20 - 10$

$y = 10$ متر

س5

③ قطعة ارض مستطيلة الشكل يحدها نهر من احدى جهاتها جد اكبر مساحة من الارض يمكن تسييجها بسياج طوله (100) م

ملاحظة / ① السياج يمثل محيط الارض
② الارض من جهة الانهار بدون سياج عادتاً

الجواب

الدالة

$m = xy$ ——① المساحة

$2x + y = $ المحيط

$100 = 2x + y$

$100 - 2x = y$

$y = 100 - 2x$ ——② العلاقة

نعوض ② في ①

$m = x(100 - 2x)$

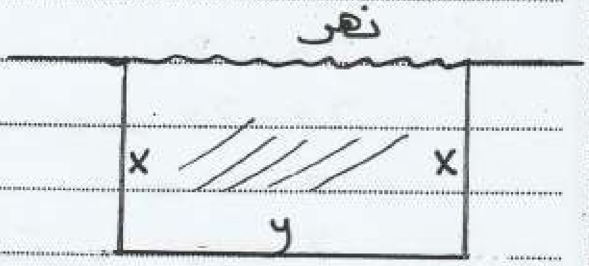
$m = 100x - 2x^2$

$m' = 100 - 4x$

$100 - 4x = 0 \quad \div 4$

$25 - x = 0$

$x = 25$ متر



نعوض في معادلة رقم ②

$y = 100 - 2(25)$

$= 100 - 50$

$= 50$ متر

المطلوب ايجاد المساحة

$m = xy$

$= (25) * (50)$

$= 1250$ $(متر)^2$

ملاحظة / اذا نصف احد ابعاد شكل بنقطة ما بستيم نفرض البعد ضعف رمزه مثل $2x$ و $2y$

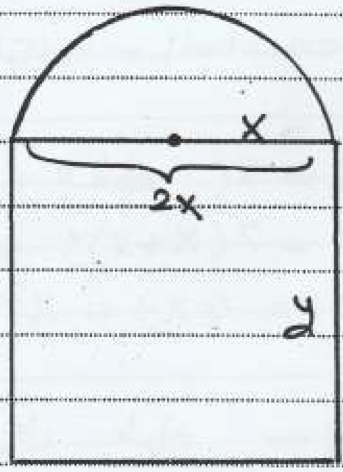
كتاب ص

مثال (4) نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة بحيث ينطبق قطرها على احد ابعاد المستطيل فاذا كان محيط المستطيل (8) م جد ابعاد المستطيل لكي تكون مساحة النافذة اكبر ما يمكن ← العلاقة

← الدالة

نفرض طول المستطيل $= 2x$

العرض $= y$



مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة نصف دائرة

$$m = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 \quad \text{—} (1)$$

المحيط = 2(الطول + العرض)

$$8 = 2(2x+y) \quad \div 2$$

$$4 = 2x + y$$

$$4 - 2x = y \rightarrow y = 4 - 2x \quad \text{—} (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$m = 2x(4-2x) + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$m = 8x - 4x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$m' = 8 - 8x + \frac{1}{2}\pi 2x$$

$$8 - 8x + \pi x = 0$$

$$8 - 8x + \frac{22}{7}x = 0 \quad \text{نضرب (7)}$$

$$56 - 56x + 22x = 0$$

$$56 - 34x = 0$$

$$56 = 34x \rightarrow x = \frac{56}{34} = \frac{28}{17} \Rightarrow x = \frac{28}{17}$$

طول المستطيل $= 2x = 2\left(\frac{28}{17}\right)$

$= \frac{56}{17}$ متر

نعوض في (2)

$$y = 4 - \frac{56}{17} = \frac{68-56}{17} = \frac{12}{17} \text{ متر}$$

تنبيه راجع مثال 43 ص 103 نفس طريقة حله

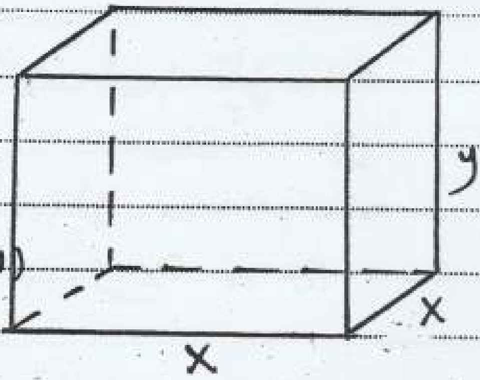
تذكره ⟸ (العرض)(الطول) = مساحة المستطيل
(العرض + الطول) 2 = المحيط

وزاري س6

مثال ⑤ حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة حجمه m^3 (108) جد ابعاده بحيث تكون مساحة الالواح المستخدمة في صنعه اقل ما يمكن

نفرض طول ضلع قاعدته $= x$

نفرض الارتفاع $= y$



المساحة = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة قاعدة واحدة

$m = 2($ الطول + العرض$)$ الارتفاع + (الطول)(العرض)

$m = 2(x+x)y + x \cdot x$

$m = 4xy + x^2$ —— ① الدالة

$V =$ طول . العرض . الارتفاع

$V = x \cdot x \cdot y$

$108 = x^2 y \Rightarrow y = \frac{108}{x^2}$ —— ② العلاقة

نعوض ② في ①

$m = 4x\left(\frac{108}{x^2}\right) + x^2$

$m = 4\left(\frac{108}{x}\right) + x^2$

$m' = 4\left(\frac{x(0) - 108(1)}{x^2}\right) + 2x$

$4\left(\frac{-108}{x^2}\right) + 2x = 0 \quad \div 2$

$\frac{-216}{x^2} + x = 0 \quad \times x^2$

$-216 + x^3 = 0 \rightarrow x^3 = 216 \rightarrow x = 6$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

نعوض في ③

$y = \frac{108}{36} = 3\ m$

مسلم البغدادي

110

س٩٥

مثال ⑥ في ورشة للنجارة يراد صنع صندوق من الخشب على شكل متوازي السطوح قاعدته مربعة الشكل بدون غطاء جد ابعاد الصندوق لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علماً ان مجموع محيط قاعدته وارتفاعه $(90)m$

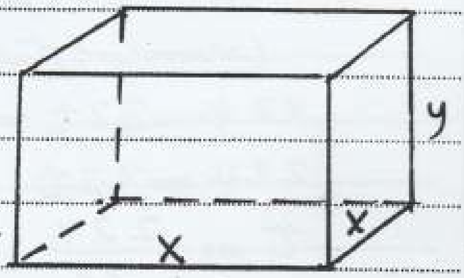
نفرض طول ضلع قاعدته $= x$

نفرض الارتفاع $= y$

الحجم = الطول . العرض . الارتفاع

$V = x \cdot x \cdot y$

$V = x^2 y$ —— ①



$90 =$ محيط قاعدته + الارتفاع

$90 = 4x + y$

$90 - 4x = y \rightarrow y = 90 - 4x$ —— ②

نعوض ② في ①

$V = x^2(90 - 4x)$

$V = 90x^2 - 4x^3$

$V' = 180x - 12x^2$

$180x - 12x^2 = 0 \qquad \div 12$

$15x - x^2 = 0$

$x(15 - x) = 0$

(اما) $x = 0$ يهمل

(او) $15 - x = 0 \rightarrow x = 15$

نعوض في ②

$y = 90 - 4(15)$

$y = 90 - 60$

$y = 30\ m$

مثال (7) اطلقت رصاصة الى الاعلى وكان ارتفاعها (m) متر في نهاية (t) من الثواني بحيث $m = 224t - 16t^2$ احسب اقصى ارتفاع تصل اليه الرصاصة

ملاحظة/ في اقصى ارتفاع تكون السرعة تساوي صفر

$m = 224t - 16t^2$

$m' = 224 - 32t$

وعندما $m' = 0$ السرعة (عند اقصى ارتفاع السرعة صفر)

$224 - 32t = 0$

$224 = 32t$

$t = \frac{224}{32} = 7 \Rightarrow t = 7$

نعوض في العلاقة الاصلية

$m = 224t - 16t^2$

$= 224(7) - 16(49)$

$= 1568 - 784$

$= 784$ متر اقصى ارتفاع

مراجعة /

$C(x)$ دالة الكلفة

(قسمة x) ← $AC = \frac{C(x)}{x}$ دالة معدل الكلفة

(نشتق) ← $(AC)'$ دالة معدل الكلفة الحدية

(نصفر المشتقة) ← $(AC)' = 0$ حجم الانتاج

مثال (١٥) اذا كانت دالـه الكلفه لانتاج سلعه ما هي $c(x)=\frac{1}{2}x^2+x+40$
جد حجم الانتاج الذي يكون عنده معدل الكلفه اقل ما يمكن

معدل الكلفه $AC=\frac{c(x)}{x}=\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{40}{x}$

$$AC=\frac{1}{2}x+1+\frac{40}{x}$$

دالة معدل الكلفه كديه $\frac{d(AC)}{dx}=\frac{1}{2}+\frac{-40}{x^2}=0$

$$\frac{1}{2}=\frac{40}{x^2}\Rightarrow x^2=80$$

$$x=\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=4\sqrt{5}$$

وحده

مثال (١١) اذا كانت دالـه الكلفه لانتاج سلعه ما هي
$c(x)=\frac{1}{9}x^2+6x+100$ جد حجم الانتاج الذي
عنده يكون معدل الكلفه اقل ما يمكن

$$AC=\frac{c(x)}{x}=\frac{1}{9}x+6+\frac{100}{x}$$

$$\frac{d(AC)}{dx}=\frac{1}{9}+\frac{-100}{x^2}=0$$

$$\frac{1}{9}=\frac{100}{x^2}$$

$$x^2=900$$

$$x=30$$

(اعلم إنك لن تحصل على محبه بعض الناس مما فعلت لارضائهم وهذه فكره
قد تزعجك في بادئ الامر لكنها تريحك في النهايه)

الفصل الرابع / التكامل

قواعد التكامل / القاعدة الاولى

$$\int A\,dx = Ax + c$$

تكامل الثابت = ثابت $x + c$

① $\int 3\,dx = 3x + c$

② $\int \sqrt{5}\,dx = \sqrt{5}\,x + c$

③ $\int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + c$

④ $\int (a+b)\,dx = (a+b)x + c$

القاعدة الثانية

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

① $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$

② $\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c$

③ $\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$ $\quad -2+1=-1$

④ $\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c$

⑤ $\int (x^5 + x^{-3})\,dx = \frac{x^6}{6} + \frac{x^{-2}}{-2} + c$

احياناً المفتاح الاخير هو الذي يفتح الباب المغلق وليس المفتاح الاول

⑥ $\int x^{\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + c = \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} + c$

⑦ $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

⑧ $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$

⑨ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2 x^{\frac{1}{2}} + c$

⑩ $\int \frac{5}{x^4} dx = 5 \int x^{-4} dx = 5 \frac{x^{-3}}{-3} + c$

$= \frac{-5}{3} x^{-3} + c$

⑪ $\int (x+7)^2 dx = \int x^2 + 14x + 49) dx$

$= \frac{x^3}{3} + 14 \frac{x^2}{2} + 49x + c$

$= \frac{x^3}{3} + 7x^2 + 49x + c$

وزاري

⑫ $\int (3 \sqrt[3]{x} + 1)^2 dx$

$= \int (3x^{\frac{1}{3}} + 1)^2 dx$

$= \int 9x^{\frac{2}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} + 1 \quad dx$

$= 9 \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 6 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + x + c = 9 * \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 6 * \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + x + c$

$= \frac{27}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{2} x^{\frac{4}{3}} + x + c$

(13) $\int \frac{(x^2+x)^2}{x^2}\,dx$

طريقة ثانية

$\int \frac{x^4+2x^3+x^2}{x^2}\,dx$

$\int \frac{x^4}{x^2}+\frac{2x^3}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}\,dx$

$=\int x^2+2x+1\,dx$

$\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+1\quad+c$

$\int \frac{x^2(x^2+2x+1)}{x^2}\,dx$

$=\int x^2+2x+1\,dx$

$=\frac{x^2}{2}+2\frac{x^2}{2}+1+c$

وزاري (14) $\int \frac{x^2+x^4}{4x}\,dx = \int \frac{x(x+x^3)}{4x}\,dx$

$=\frac{1}{4}\int x+x^3\,dx$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)+c$

(15) $\int (3x-1)(x+5)\,dx$

$=\int 3x^2+15x-x-5\quad dx$

$=\int 3x^2+14x-5\,dx$

$=3\frac{x^3}{3}+14\frac{x^2}{2}-5x+c$

$=x^3+7x^2-5x+c$

(16) $\int (z^2+5)\,dx$ → التكامل x لذا يعتبر ما عداه ثابت

$=(z^2+5)x+c$

سالم البغدادي

(17) $\int \frac{x^4-16}{x-2}\,dx = \int \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)}\,dx$

$= \int \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)}\,dx$

$= \int x^3+4x+2x^2+8 \quad dx$

$= \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^3}{3} + 8x + c$

$= \frac{x^4}{4} + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + 8x + c$

(18) $\int \frac{x^3-27}{x-3}\,dx = \int \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}\,dx$

$= \int x^2+3x+9 \quad dx$

$= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 9 + c$

وزاري

(19) $\int \frac{x^3+7x^2-8x}{x-1}\,dx = \int \frac{x(x^2+7x-8)}{(x-1)}\,dx$

$= \int \frac{x(x+8)(x-1)}{(x-1)}\,dx$

$= \int (x^2+8x)\,dx$

$= \frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + c$

الارادة والروح والنية اقوى من البدن

(ونفس وما سواها فألهمها فجورها وتقواها قد أفلح من زكاها وقد خاب من دساها)

(20) $\int \frac{x^2-4x+3}{x^4-x^3}\,dx$

$= \int \frac{(x-3)(x-1)}{x^3(x-1)}\,dx$

$= \int (x^1-3)\,x^{-3}\,dx$

$= \int x^{-2} - 3x^{-3}\,dx$

$= \frac{x^{-1}}{-1} - 3\,\frac{x^{-2}}{-2} + c$

(21) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}+3}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$

$= \int (x^{\frac{1}{3}}+3)\,x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

$= \int x^{\frac{-1}{3}} + 3x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

$= \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + 3\,\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c$

$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 3\cdot\frac{3}{1}\,x^{\frac{1}{3}} + c$

$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 9\,x^{\frac{1}{3}} + c$

كتاب

(22) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{2}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$

$= \int (x^{\frac{2}{3}}+2)\,x^{\frac{-1}{3}}\,dx$

$= \int x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{-1}{3}}\,dx$

$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 2\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 3\,x^{\frac{2}{3}} + c$

(23) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

$\int (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-1}{3}}) \, dx$

$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$

كتاب

(24) $\int \sqrt{x} \, (\sqrt{x}+1)^2 \, dx$

$\int \sqrt{x} \, (x + 2\sqrt{x} + 1) \, dx$

$\int x^{\frac{1}{2}} (x + 2x^{\frac{1}{2}} + 1) \, dx$

$= \int x^{\frac{3}{2}} + 2x + x^{\frac{1}{2}} \, dx$

$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

واجبات / ج

① $\int \frac{5x+2x^4}{x^3} \, dx$ $\quad (\frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{x} + c)$ ج

② $\int (x - \frac{2}{x^3} + 4) \, dx$ $\quad (\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + 4x + c)$ ج

③ $\int (n^3 + \frac{5}{n^4}) \, dn$ $\quad (\frac{1}{4}n^4 + n^5 + c)$ ج

الحظ حليف المبادر والنشيط والساعي والعامل انه يمشي معك اذا مشيت فاذا جلست في كسل جلس معك .

قاعدة الثالثة /

$$\int [f(x)]^{n} f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

أي : اذا كانت دالة اسية ومشتقة داخل القوس موجود فنضيف للقوة القوس واحد ونقسم على الاس الجديد

① $\int (x^3-2)^7\, 3x^2\, dx \Rightarrow \frac{(x^3-2)^8}{8} + c$

---

② $\int (x^4-3)^3\, x^3\, dx$

$\frac{1}{4}\int (x^4-3)^3\, 4x^3\, dx \Rightarrow \frac{1}{4}\,\frac{(x^4-3)^4}{4} + c$

$\Rightarrow \frac{1}{16}(x^3-3)^4$

---

③ $\int (x^3+7)^5\, x^2\, dx$

$\frac{1}{3}\int (x^3+7)^5\, 3x^2\, dx$

$\frac{1}{3}\,\frac{(x^3+7)^6}{6} + c = \frac{1}{18}(x^3+7)^6 + c$

وزاري

④ $\int x^2 (7-2x^3)^4\, dx$

$= \frac{1}{-6}\int (7-2x^3)^4 \cdot -6x^2\, dx$

$= \frac{1}{-6}\,\frac{(7-2x^3)^5}{5} + c = \frac{-1}{30}(7-2x^3)^5 + c$

⑤ $\int \sqrt{x^2-7x+3}\ (2x-7)\, dx$

$\int (x^2-7x+3)^{\frac{1}{2}}\ (2x-7)\, dx$

$\frac{(x^2-7x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x^2-7x+3)^{\frac{3}{2}} + c$

⑥ $\int \frac{(x-2)}{(x^2-4x+5)^2} dx$

$\int (x^2-4x+5)^{-2}\ (x-2)\, dx$

$\frac{1}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2}\ 2(x-2)\, dx$

$\frac{1}{2}\ \frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{-2(x^2-4x+5)} + c$

د ⑦ $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}} dx$

وزاري (2013)

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ الجواب $\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c\right)$

$= \int \frac{x^3}{(5-x^4)^{\frac{1}{5}}} dx$

$= \int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}\ x^3$

$= \frac{1}{-4} \int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}\ -4x^3\, dx$

$= \frac{1}{-4}\ \frac{(5-x^4)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c = \frac{-1}{4} \cdot \frac{5}{4} (5-x^4)^{\frac{4}{5}} + c$

$= \frac{-5}{16} (5-x^4)^{\frac{4}{5}} + c$

⑧ $\int \frac{dx}{4x^2-12x+9}$

$\int \frac{dx}{(2x-3)(2x-3)}$

$\int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{-2}\, 2\, dx$

$= \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{-2(2x-3)} + c$

⑨ $\int \frac{2x\,dx}{x^3-4x^2+4x}$

$\int \frac{2x\ dx}{x(x^2-4x+4)}$

$\int \frac{2\ dx}{(x-2)(x-2)}$

$\int \frac{2\,dx}{(x-2)^2} = 2\int (x-2)^{-2}\ dx$

$= 2\ \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{-2}{(x-2)} + c$

وزاري 2013

⑩ $\int \frac{3x+12}{(x+4)^7}\,dx$

$\int \frac{3(x+4)}{(x+4)^7}\,dx = \int \frac{3}{(x+4)^6}\,dx$

$3\int (x+4)^{-6}\ dx$

$3\ \frac{(x+4)^{-5}}{-5} + c = \frac{3}{-5}(x+4)^{-5} + c$

($\int \frac{2x+4}{(x+2)^5}\,dx$ وزاري 2005/2)

سالم البغدادي

⑪ $\int \sqrt[3]{x^5+x^3}\,dx$

$\int \sqrt[3]{x^3(x^2+1)}\,dx$

$\int \sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{(x^2+1)}\,dx$

$\int x\,(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{3}}\,2x\,dx$

$\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,(x^2+1)^{\frac{4}{3}}+c = \frac{3}{8}\,(x^2+1)^{\frac{4}{3}}+c$

---

⑫ $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx$

$\int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\,dx$

$\int \sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{(3-5x^2)}\,dx$

$\int x\,(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$\frac{1}{-10}\int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\cdot -10x\,dx$

$\frac{-1}{10}\,\frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c = \frac{-1}{10}\cdot\frac{3}{4}\,(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}+c$

$= \frac{-3}{40}\,(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}+c$

(سوء الخلق قد يبعدك عن الخالق والمخلوق وسيئ الاخلاق معذباً دائماً فأنه اسير عدوه الذي لا يتركه ابداً حل)

(13) $\int \sqrt[4]{2x^4 - 3x^6}\ dx$

$\int \sqrt[4]{x^4(2-3x^2)}\ dx$

$\int \sqrt[4]{x^4}\ \sqrt[4]{2-3x^2}\ dx$

$\int x\ (2-3x^2)^{\frac{1}{4}}\ dx$

$\frac{1}{-6}\int (2-3x^2)^{\frac{1}{4}} \cdot -6x\ dx$

$\frac{-1}{6}\ \frac{(2-3x^2)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{-1}{6} \cdot \frac{4}{5}\ (2-3x^2)^{\frac{5}{4}} + c$

$= \frac{-2}{15}\ (2-3x^2)^{\frac{5}{4}} + c$

(14) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2 - 14x + 49}}$

$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-7)(x-7)}}$

$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-7)^2}} = \int \frac{dx}{(x-7)^{\frac{2}{5}}}$

$= \int (x-7)^{\frac{-2}{5}}\ dx$

$\frac{(x-7)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c$

$\frac{5}{3}\ (x-7)^{\frac{3}{5}} + c$

واجبات / وزارية

① $\int (x^2+2x-5)^3 (x+1)\, dx$ 2001/1

② $\int x \sqrt{x^2+4}\; dx$ 2001

③ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$ الجواب ($\sqrt{x^2+9} + c$)

④ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ 2002/1

⑤ $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 2004/1

* هل تبيع عينيك مقابل مليون دولار؟ وماذا مقابل ساقيك او يديك او سمعك او اطفالك او عائلتك اجمع كل هذه الثروات وستجد انك لن تبيع ما تملك مقابل جبال من الذهب والالماس .

* عن رسول الله (ص) يا علي إن الجنة مشتاقة إليك والى شيعتك وإن ملائكة العرش المقربين يفرحون بقدومهم والملائكة تستغفر لهم .

* إن مفتاح القلوب المغلقة والصدئة هي الكلمة الجميلة الطيبة والتي تصدر من القلوب الصادقة فتخترق الحجب لتصل الى قلوب الآخرين .

تطبيقات على التكامل غير المحدد

مشتقة　　　　مشتقة

$f''(x) \leftarrow f'(x) \leftarrow f(x)$

الدالة　تكامل　الميل　تكامل

ملاحظة / ① كل نقطة تنتمي للمنحني تحقق المعادلة أي نعوض بدل x, y في المعادلة

مثال ① اذا كان ميل المنحني عند كل نقطة هو $3x^2 - 2x + 1$ جد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة (2,3)

$f(x) = \int$ الميل

$f(x) = \int 3x^2 - 2x + 1 \; dx$

$f(x) = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + c$

$f(x) = x^3 - x^2 + x + c$

المنحني يمر (2,3) فهي تحقق المعادلة

$3 = (2)^3 - (2)^2 + 2 + c$

$3 = 8 - 4 + 2 + c$

$3 = 6 + c$

$3 - 6 = c$

$c = -3 \Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$

ملاحظة / اعطى النقطة من أجل ايجاد الثابت c

(مصافحة المؤمن بألف حسنة) الامام الصادق ع

سالم البغدادي

وزاري 2005

مثال ② جد معادلة المنحني الذي ميله عند اي نقطة هو $4x^3+3x^2-2x+3$ ويمر بالنقطة $(-2,2)$

الميل ∫ ... $= \acute{y}$

$$y = \int 4x^3+3x^2-2x+3$$

$$y = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x + c$$

$$y = x^4 + x^3 - x^2 + 3x + c$$

المنحني $(-2,2)$ يحقق المعادلة

$$2 = (-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 + 3(-2) + c$$

$$2 = 16 - 8 - 4 - 6 + c$$

$$2 = 16 - 18 + c$$

$$2 = -2 + c$$

$$2+2 = c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow y = x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 4$$

مثال ③ د منحني ميله عند أي نقطة $x\sqrt{x^2+9}$ جد معادلته اذا كان يمر بالنقطة $(0,7)$

$$y = \int x\sqrt{x^2+9}\, dx$$

$$y = \int (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\, x\, dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\, 2x\, dx$$

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

سالم البغدادي

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2+9)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$y = \frac{1}{3} (x^2+9)^{\frac{3}{2}} + c$$

بما ان المنحني يمر بالنقطة $(0,7)$ اذن يحقق المعادلة

$$7 = \frac{1}{3} (0+9)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$7 = \frac{1}{3} (9)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$7 = \frac{1}{3} (3^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$7 = \frac{1}{3} \cdot 27 + c \Rightarrow 7 = 9 + c$$

$$7 - 9 = c \Rightarrow c = -2$$

نعوض في المعادلة $y = \frac{1}{3} (x^2+9)^{\frac{3}{2}} - 2$

مثال (4) جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) يساوي $\frac{-2}{x^3}$ وكان المنحني يمر بالنقطة $(1,3)$

$$y = \int \frac{-2}{x^3}\, dx$$

$$y = \int -2x^{-3}\, dx$$

$$y = -2 \int x^{-3}\, dx$$

$$y = -2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$y = x^{-2} + c \Rightarrow y = \frac{1}{x^2} + c$$

تشكل

بما ان المنحني يمر $(1,3)$ اذن تحقق المعادلة

$$3 = \frac{1}{1} + c$$

$$3 = 1 + c$$

$$3 - 1 = c$$

$$c = 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{x^2} + 2$$

(المال الحرام يقسي القلب)

ملاحظة / قد يعطي في السؤال الميل والنقطة غير كاملة فنكمل النقطة من جعل الميل = صفر لنجد x فتكون (x , y) كاملة تحقق المعادلة كما مر

مثال ⑤ / جد معادلة المنحني التي ميله عند اية نقطة $2x-4$ وكان للمنحني نهاية صغرى قيمتها (-3)

$y=-3$

$2x-4=0 \quad \div 2$

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2, -3)$ تحقق المعادلة

$y = \int$ الميل

$y = \int 2x-4 \; dx$

$y = 2\frac{x^2}{2} - 4x + c$

$y = x^2 - 4x + c$

$(2, -3)$ تحقق المعادلة

$-3 = (2)^2 - 4(2) + c$

$-3 = 4 - 8 + c$

$-3 = -4 + c$

$-3 + 4 = c \rightarrow c = 1 \rightarrow y = x^2 - 4x + 1$

مثال واجب / جد معادلة المنحني التي ميله $6-2x$ وكان له نهاية عظمى قيمتها (7)

تنبيه / اذا ظهرت اكثر من قيمة لـ x فنختبرها على خط الاعداد

سالم الجشعمي

مثال ⑥ جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) هو $3x^2-6x-9$
وكان للمنحني نهاية عظمى قيمتها (10)

$3x^2-6x-9=0 \quad \div 3$ (لاحظ لم يعطي النقطة كاملة لنكملها)

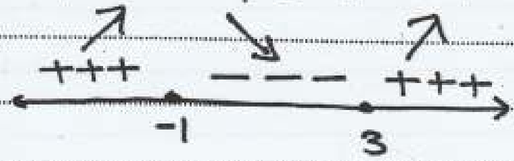
$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

إما $x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3,10)$

أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow (-1,10)$

(لكن أي من النقطتين هي النهاية العظمى ؟؟ لذا نختبر قيم x على خط الأعداد)



$y' = 3x^2-6x-9$

اذن من ملاحظة خط الاعداد فأن $(-1,10)$ هي النهاية العظمى
التي تحقق المعادلة

$y = \int$ الميل

$y = \int 3x^2-6x-9 \, dx$

$y = 3\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} - 9x + c$

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + \overset{?}{c}$

نعوض $(-1,10)$ في المعادلة

$10 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + c$

$10 = -1 - 3 + 9 + c$

$10 = 5 + c$

$10 - 5 = c$

$c = 5 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

مثال (7) جد معادلة المنحني الذي ميله عند أية نقطة x^2-x-2 وكان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات

معناها $y=0$

(اذن النقطة ناقصة) $x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

اما $x-2=0 \rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$

او $x+1=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow (-1,0)$

(نختبر لنعرف أي من هاتين النقطتين هي النهاية العظمى)

+++ (-1) − − − (2) +++ $\quad y' = x^2-x-2$

اذن $(-1,0)$ هي النهاية العظمى التي تحقق المعادلة

$y = \int$ الميل

$y = \int x^2-x-2 \; dx$

$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$

(نعوض $(-1,0)$ لايجاد c)

$0 = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) + c$

$0 = \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + c$ للتخلص من الكسور (نضرب 6)

$0 = -2 - 3 + 12 + 6c$

$0 = 7 + 6c$ نعوض

$-7 = 6c \rightarrow c = \frac{-7}{6}$

$\therefore y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{7}{6}$

عند الأذان يريد الله تعالى أن ينزل الرحمن عليك فلا تمنعها وقل لبيك داعي الله

مثال ② منحني يمر بالنقطتين $(2,-3)$ ، $(-1,9)$ وميله عند أية نقطة $(ax-5)$ جد معادلته

الميل $\int$ — y

$y = \int ax - 5 \; dx$

$y = a\frac{x^2}{2} - 5x + c$

(لاحظ هي المعادلة المطلوبة ولكن هنالك مجهولان ؟ لنجدها عن طريق تعويض النقطتين كلا على حده)

عند $(2,-3)$ تحقق المعادلة

$-3 = a\frac{4}{2} - 5(2) + c$

$-3 = 2a - 10 + c$

$-3 + 10 = 2a + c$

$7 = 2a + c \rightarrow 2a + c = 7$ ——— ①

وعند $(-1,9)$ تحقق المعادلة الاصلية

$9 = a\frac{(-1)^2}{2} - 5(-1) + c$

$9 = \frac{1}{2}a + 5 + c$ نضرب 2

$18 = a + 10 + 2c$

$18 - 10 = a + 2c$

$8 = a + 2c \rightarrow a + 2c = 8$

$2a + 4c = 16$ ——— ②

$\mp 2a \mp c = \mp 7$ ——— ①

بالطرح

$3c = 9 \rightarrow c = 3$

نعوض في أي معادلة لتكن ①

$2a + 3 = 7$

$2a = 7 - 3 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow y = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x + 3$

$y = x^2 - 5x + 3$

إيجاد معادلة المنحني اذا علمت المشتقة الثانية

طريقة الحل

① $y' = \int$ المشتقة الثانية

② ننتظر c لذا يعطي في السؤال عامل مساعد لتخلص من c
(أي يعطي ميل ونقطة)

③ $y = \int$ الميل أيضا ننتظر c نعوض النقطة لإيجاد c

مثال ① جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية $6x-2$
وكان ميله عند $(2,5)$ يساوي -1
(هذا هو العامل المساعد للتخلص من c)

$y' = \int$ المشتقة الثانية

$y' = \int 6x-2 \, dx$

$y' = 6\frac{x^2}{2} - 2x + c$

$y' = 3x^2 - 2x + c_1$ (نعوض $y' = -1$ و $(2,5)$ لإيجاد c_1)

$-1 = 3(2)^2 - 2(2) + c_1$

$-1 = 12 - 4 + c_1$

$-1 = 8 + c_1 \Rightarrow c_1 = -1 - 8 \Rightarrow c_1 = -9$

$y' = 3x^2 - 2x - 9$ الميل

$y = \int$ الميل

$y = \int 3x^2 - 2x - 9 \, dx$

$y = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - 9x + c_2$

$y = x^3 - x^2 - 9x + c_2$ نعوض $(2,5)$

$5 = (2)^3 - (2)^2 - 9(2) + c_2$

$5 = 8 - 4 - 18 + c_2$

$5 = -14 + c_2$

$5 + 14 = c_2 \Rightarrow c_2 = 19 \Rightarrow y = x^3 - x^2 - 9x + 19$

مثال ② جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية $12x^2 - 2$

وكانت $y' = 5$ عند النقطة $(1,2)$

عامل مساعد للخلاص من c

$y' = \int$ المشتقة الثانية

$y' = \int 12x^2 - 2 \; dx$

$y' = 12\frac{x^3}{3} - 2x + c_1$

$y' = 4x^3 - 2x + c_1$

بما ان $y' = 5$ عند $(1,2)$

$5 = 4(1)^3 - 2(1) + c_1$

$5 = 4 - 2 + c_1$

$5 = 2 + c_1$

$5 - 2 = c_1 \Rightarrow c_1 = 3 \Rightarrow y' = 4x^3 - 2x + 3$

$y = \int$ الميل

$y = \int 4x^3 - 2x + 3$

$y = 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + 3x + c_2$

$y = x^4 - x^2 + 3x + c_2$

(نعوض $(1,2)$ لايجاد c_2)

$2 = (1)^4 - (1)^2 + 3(1) + c_2$

$2 = 1 - 1 + 3 + c_2$

$2 - 3 = c_2$

$c_2 = -1$

$\Rightarrow y = x^4 - x^2 - 3x - 1$

مثال ③ جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية $6x$ والذي يمر بالنقطتين $(1,6)$ $(-1,6)$

$\text{المشتقة الثانية} \int = \acute{y}$

$\acute{y} = \int 6x \, dx$

الميل $\acute{y} = 6\frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow \acute{y} = 3x^2 + c_1$

الميل ⓪ المشتقة الاولى $\int = y$

$y = \int (3x^2 + c_1) \, dx$

المعادلة $y = 3\frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$

وللتخلص من c_1 و c_2

نعوض $(1,6)$ في المعادلة

$6 = (1)^3 + c_1(1) + c_2$

$6 - 1 = c_1 + c_2$

$c_1 + c_2 = 5$ —— ①

نعوض $(-1,6)$ في المعادلة

$6 = (-1)^3 + c_1(-1) + c_2$

$6 = -1 - c_1 + c_2$

$6 + 1 = -c_1 + c_2$

$-c_1 + c_2 = 7$ —— ②

مع $c_1 + c_2 = 5$ ①

بالجمع

$2c_2 = 12 \Rightarrow \boxed{c_2 = 6}$ نعوض في ①

$c_1 + 6 = 5$

$c_1 = 5 - 6 \Rightarrow \boxed{c_1 = -1}$

نعوض c_1 و c_2 في المعادلة فتصبح $y = x^3 - x + 6$

واجب/ نفس السؤال السابق ولكن النقطتين $(1,4)$ $(-1,8)$

سالم البغدادي

التكامل المحدد

① $\int_{-1}^{1} 3x^2\,dx$

$3\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 3\,\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1}$

$= x^3\Big]_{-1}^{1} = (1^3) - ((-1)^3)$

$= 1 - (-1) = 2$

---

② $\int_{1}^{2} (3x^2 + 2x - 2)\,dx$

$= 3\,\frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^2}{2} - 2x\Big]_{1}^{2}$

$= x^3 + x^2 - 2x\Big]_{1}^{2} = (2^3 + 2^2 - 2(2)) - (1+1-2)$ صفر

$= 8 + 4 - 4$

$= 8$

---

③ $\int_{-1}^{0} \frac{x^3 - 27}{x - 3}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}\,dx$

$= \frac{x^3}{3} + 3\,\frac{x^2}{2} + 9x\Big]_{-1}^{0}$

$= (0) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{3}{2}(-1)^2 + 9(-1)\right)$

$= -\left(\frac{-1}{3} + \frac{3}{2} - 9\right)$

$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 9 = \frac{2 - 9 + 64}{6}$

$= \frac{47}{6}$

④ $$\int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 (3x-1)^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 (3x-1)^{\frac{2}{3}}\,3\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(3x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Bigg]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\left[(3x-1)^{\frac{5}{3}}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(3(3)-1\right)^{\frac{5}{3}} - \left(3(0)-1\right)^{\frac{5}{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[(8)^{\frac{5}{3}} - (-1)^{\frac{5}{3}}\right]$$ قوه الكسر فردي =1-

$$= \frac{1}{5}\left[(2)^{5} - (-1)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[32+1\right] = \frac{33}{5}$$

⑤ $$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg]_0^1$$

$$= (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^1$$

$$= (1^2+1)^{\frac{1}{2}} - (0+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2)^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{2}-1$$

⑥ $\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$ واجب/ (الجواب 2)

⑦ $\int_0^8 \sqrt{x^2-14x+49}\,dx$

$= \int_0^8 \sqrt{(x-7)(x-7)}\,dx$

$= \int_0^8 \sqrt{(x-7)^2}\,dx$

$= \int_0^8 x-7\,dx$

$= \frac{x^2}{2} - 7x \Big]_0^8 = \left(\frac{64}{2} - 7(8)\right) - (0)$

$= 32 - 56 = -24$

⑧ $\int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{x^2+12x+36}\,dx$

$= \int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{(x+6)(x+6)}\,dx$

$= \int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{(x+6)^2}$

$= \int_{-6}^{-5} (x+6)^{\frac{2}{3}}\,dx$

$\frac{(x+6)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \Bigg]_{-6}^{-5} = \frac{3}{5}\left[(x+6)^{\frac{5}{3}}\right]_{-6}^{-5}$

$= \frac{3}{5}\left[(-5+6)^{\frac{5}{3}} - (-6+6)^{\frac{5}{3}}\right]$ ($-5+6 = 1$, $-6+6 = 0$)

$= \frac{3}{5}\left[1^{\frac{5}{3}} - 0\right] = \frac{3}{5}$

(9) $\int_4^0 x(x-1)(x-2)\,dx$

$= -\int_0^4 x(x^2-2x-x+2)\,dx$

$= -\int_0^4 x(x^2-3x+2)\,dx$

$= -\int_0^4 x^3-3x^2+2x\,dx$

$= -\left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right]_0^4$

$= -\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^4$

$= -\left[\left(\frac{(4)^4}{4} - (4)^3 + 4^2\right) - (0)\right]$

$= -(64 - 64 + 16) = -16$

(10) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)dx$

$\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$\left.2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$=\left(2(4)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(2+\frac{2}{3}\right)$

$=\left(2(2^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(2^2)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(2+\frac{2}{3}\right)$

$=\left(4+\frac{2}{3}(8)\right) - \left(2+\frac{2}{3}\right) = 4 + \frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3} = 2 + \frac{14}{3}$

$= \frac{20}{3}$

(11) $\int_{0}^{a} (2x-1)\,dx = 42$ جد قيمة $a \in R$ اذا علمت

(نأخذ الطرفين معاً)

$$2\frac{x^2}{2} - x \Big]_0^a = 42$$

$$x^2 - x \Big]_0^a = 42$$

$$(a^2 - a) - (\ 0\ ) = 42$$

$$a^2 - a = 42$$

$$a^2 - a - 42 = 0$$

$$(a-7)(a+6) = 0$$

اما $a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7$

او $a + 6 = 0 \Rightarrow a = -6$ [illegible]

---

(12) $$\int_{1}^{125} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{(x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

$$\int_{1}^{125} (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{-2}{3}}\,dx$$

$$3\int (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}\,dx$$

$$3\,\frac{(x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_1^{125} = 3 \cdot \frac{2}{3}\left[(x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{125}$$

$$= 2\left[(125^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}} - (1 - 1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

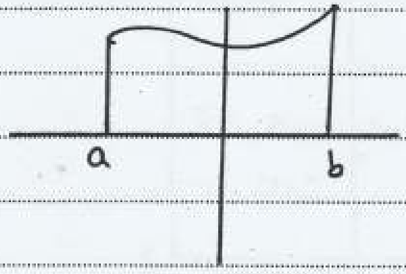
$$= 2\left[(5^3)^{\frac{1}{3}} - 1\right] = 2(4)^{\frac{3}{2}} = 2(2^2)^{\frac{3}{2}} = 2(8) = 16$$

سالم البغدادي

المساحه بين منحني ومحور السينات

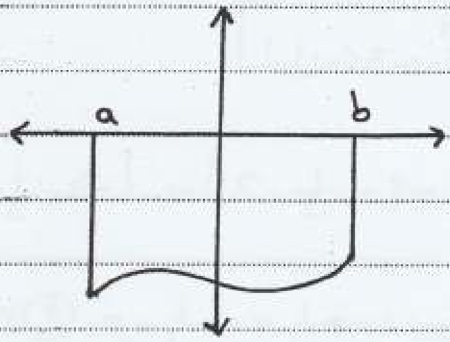
المساحه المحددة بمنحني الداله $y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

① $f(x) > 0$ أي المنحني فوق محور السينات فأن المساحه المحدده بمنحني الداله ومحور السينات والمستقيمين والتي يرمز لها A



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

② $f(x) < 0$ أي المنحني تحت محور السينات فأنه



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

---

* الطفل الصغير يبتسم بسعاده اذا بادلته التبسم لذا السعاده والانشراح تنتقل الى الآخرين بسرعه كالنار في الهشيم .

* سئل الامام علي (ع) كيف بلغت هذه المرتبه
قال : جلستُ عند بوابه قلبي فلم أدخل فيه غير الله

(طريقة الحل)

① نعين الفترة المعطاة على خط الاعداد

② نصفر الدالة لنجد قيم x ونحددها على خط الاعداد

③ نرسم الجدول لتحديد اشارة الفترة

④ نجد التكاملات

2011 وزاري

مثال ① جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)=x^2-2x-3$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,3]$

بما ان المنحني يتقاطع مع محور السينات ⇐ $y=0$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0 \rightarrow$ اما $x=3$ او $x=-1$

$[-1 \text{ ——— } 3]$

الموقع	اشارة $f(x)$	$x \in$ للفترة	الفترة
تحت محور السينات	$f(0)=(0)^2-2(0)-3 = -3<0$	$x=0$	$[-1,3]$

$$A=-\int_{-1}^{3} x^2-2x-3\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-1}^{3}$$

$$A=-\left[\left(\frac{27}{3}-9-9\right)-\left(\frac{-1}{3}-(-1)^2-3(-1)\right)\right]$$

$$=-\left[-9-\left(\frac{-1}{3}-1+3\right)\right]$$

$$=-\left[-9-\left(\frac{-1}{3}+2\right)\right]=-\left[-9+\frac{1}{3}-2\right]=-\left[-11-\frac{1}{3}\right]=\frac{32}{3}$$

مثال ② جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x=-2$ و $x=2$ حيث $y=f(x)=x^3-4x$

بما ان المنحني يتقاطع مع محور السينات $y=0$

$x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0 \rightarrow x(x-2)(x+2)=0$

اما $x=0$ او $x=2$ او $x=-2$

$[-2 \text{ —— } 0 \text{ —— } 2]$

الموقع	اشارة $f(x)$	$x \in$ للفترة	الفترة
فوق	$f(-1)=(-1)^3-4(-1) = -1+4=3>0$	$x=-1$	$[-2,0]$
تحت	$f(1)=(1)^3-4(1)=-3<0$	$x=1$	$[0,2]$

$A = A_1 + A_2$

$$A = \int_{-2}^{0} x^3 - 4x \, dx - \int_{0}^{2} x^3 - 4x \, dx$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= (0) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right) - \left[\left(\frac{2^4}{4} - 2(2)^2\right) - (0)\right]$$

$$= -\left(\frac{16}{4} - 8\right) - \left[\frac{16}{4} - 8\right]$$

$$= -(4-8) - (4-8) = -(-4) - (-4) = 4+4 = 8 \text{ unit}^2$$

مثال ③ جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x=3$, $x=0$

بما ان المنحني يقطع محور السينات فأن $f(x) = 0$

$\sqrt{x+1} = 0$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

خارج الفترة يهمل



الفترة	x∈ للفترة	اشارة الدالة $f(x)$	الموقع
$[0,3]$	$x=1$	$f(1)=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} > 0$	فوق

قد لا نستطيع ان نفعل اشياء عظيمة في هذه الدنيا ولكن يمكننا ان نفعل اشياء صغيرة ولكن بحب (شديد)

سالم البغدادي

$$A = \int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx$$

$$A = \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$A = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^3 = \frac{2}{3}\Big[(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3$$

$$= \frac{2}{3}\Big[(3+1)^{\frac{3}{2}} - (0+1)^{\frac{3}{2}}\Big]$$

$$= \frac{2}{3}\Big[(2^{2})^{\frac{3}{2}} - 1\Big] = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}\,unt^2$$

مثال ④ جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x)=x^3-x$ ومحور السينات

الجواب/ بما ان المنحني يقطع محور السينات $f(x)=0$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

اما $x=0$ او $x=1$ او $x=-1$

$[-1 \quad 0 \quad 1]$

الفترة	للفترة $x \in$	اشارة $f(x)$	الموقع
$[-1,0]$	$x=\frac{-1}{2}$	$f(\frac{-1}{2})=(\frac{-1}{2})^3-(\frac{-1}{2}) = \frac{-1}{8}+\frac{1}{2} = \frac{-2+8}{16} = \frac{6}{16} > 0$	فوق
$[0,1]$	$x=\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}-\frac{1}{2} = \frac{2-8}{16} = \frac{-6}{16} < 0$	تحت

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx - \int_0^1 (x^3-x)\,dx$$

$$A = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} - \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big]_0^1$$

$$= (0) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - \Big[(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - 0\Big]$$

$$= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2}{4} + 1 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ unt^2$$

قال النبي (ص) (لا اسراف في الضياء) فالنور الجيد يزيد النفس اشراقاً.

(5) جد المساحة المحددة بمنحني $y = f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات
على الفترة $[-1,1]$

بما ان المنحني يتقاطع مع محور السينات $y = 0$

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0$

$x^2(x-1)(x+1) = 0$

اما $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

او $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

او $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$[-1 \quad\quad 0 \quad\quad 1]$

الفترة	$x \in$ الفترة	اشارة الدالة	الموقع
$[-1,0]$	$x = \frac{-1}{2}$	$f(\frac{-1}{2}) = (\frac{-1}{2})^4 - (\frac{-1}{2})^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{4-16}{64} = \frac{-12}{64} < 0$	تحت
$[0,1]$	$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^4 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{-12}{64} < 0$	تحت

$$A = A_1 + A_2$$

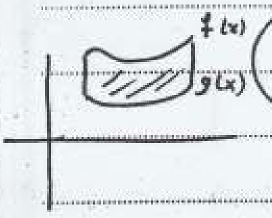
$$A = -\int_{-1}^{0} x^4 - x^2 \, dx - \int_{0}^{1} x^4 - x^2 \, dx$$

اكمل الحل

الجواب $A = \frac{4}{15} \, unit^2$

المساحة المحددة بين منحنيين دالتين

إذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دالتين معرفتين على الفترة $[a,b]$
فالمساحة المحددة بين الدالتين والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ هي



$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$ عندما $f(x)>g(x)$

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx$$ عندما $g(x)>f(x)$

مثال ① جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين
$f(x)=x$ و $g(x)=x^3$

$R(x)=f(x)-g(x)$

$R(x)=x-x^3$

نقاط تقاطع $R(x)$ مع محور السينات $\Leftarrow R(x)=0$

$x-x^3=0 \Rightarrow x(1-x^2)=0$

$x(1-x)(1+x)=0$

إما $x=0$

أو $1-x=0 \Rightarrow x=1$

أو $1+x=0 \Rightarrow x=-1$

$[-1 \quad 0 \quad 1]$

الفترة	$x\in$ للفترة	إشارة الدالة $R(x)$	الموقع
$[-1,0]$	$x=\frac{-1}{2}$	$R(\frac{-1}{2})=(\frac{-1}{2})-(\frac{-1}{2})^3=\frac{-1}{2}-(\frac{-1}{8})=\frac{-1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{-8+2}{16}=\frac{-6}{16}<0$	تحت
$[0,1]$	$x=\frac{1}{2}$	$R(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{8-2}{16}=\frac{6}{16}>0$	فوق

رأيت أبي في المنام فقلت يا أبت، ما فعل الله بك؟ قال غفر لي. فقلت بم ذلك؟
قال: بكتابتي الصلاة على النبي محمد صلى الله عليه وآله وسلم.

$A = A_1 + A_2$

$A = -\int_{-1}^{0} (x - x^3)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx$

$= -\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{0} + \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{0}^{1}$

$= -\left[(0) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \right] + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) - (0)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ unit^2

مثال ② جد المساحة المحصورة بمنحني الدالتين $y = x^4 - 12$ و $y = x^2$

$R(x) = x^4 - 12 - x^2 = 0$

$x^4 - x^2 - 12 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$

اما $x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2$, $x = -2$ $[-2 , 2]$

او $x^2 + 3 = 0$ تهمل

الفترة	$x \in$ للفترة	اشارة $R(x)$	الموقع
$[-2, 2]$	$x = 0$	$R(0) = (0)^4 - 12 - (0)^2 = -12 < 0$	تحت

سالم البغدادي

$$A = -\int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 - 12)\, dx$$

$$= -\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x \right]_{-2}^{2}$$

$$= -\left[\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24\right) - \left(\frac{-32}{5} - \frac{-8}{3} + 24\right) \right]$$

$$= -\left[\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 \right]$$

$$= -\left[\frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48 \right] = \frac{-64}{5} + \frac{16}{3} + 48$$

(3) (5) (15)

$$= \frac{-192 + 80 + 180}{15} = \frac{608}{15}$$

مثال (2) جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين
$f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{2}x$ والمستقيمين $x=2$, $x=5$

$$R(x) = \sqrt{x-1} - \frac{x}{2}$$

نقاط تقاطع الدالة R(x) مع محور السينات

نجعل $R(x) = 0$

$$\sqrt{x-1} - \frac{x}{2} = 0$$

$$\sqrt{x-1} = \frac{x}{2}$$ بتربيع الطرفين

$$x - 1 = \frac{x^2}{4}$$

$$4x - 4 = x^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)(x-2) = 0$$

$$x = 2$$

$[2 \quad\quad 5]$

الفترة	$x \in$ الفترة	اشارة $R(x)$	الموقع
$[2,5]$	$x=3$	$R(3) = \sqrt{3-1} - \frac{3}{2} = \sqrt{2} - \frac{3}{2} < 0$	تحت

$$A = -\int_2^5 (x-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x \, dx$$

$$A = -\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} \right]_2^5$$

$$= -\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2 \right]_2^5$$

$$= -\left[\left(\frac{2}{3}(5-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(25)\right) - \left(\frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(4)\right) \right]$$

$$= -\left[\frac{2}{3}(2)^{3} - \frac{25}{4}) - (\frac{2}{3} - 1) \right]$$

$$= -\left[\frac{16}{3} - \frac{25}{4} - \frac{2}{3} + 1 \right]$$

$$= -\left[\frac{14}{3} - \frac{25}{4} + \frac{1}{12} \right]$$

$$= -\left[\frac{56 - 75 + 12}{12} \right] = -\left[\frac{-7}{12} \right] = \frac{7}{12}$$

الحق الدنيا ليست بدار راحه فتلك حقيقة يشعر بها الجميع ولكنها ايضاً ليست بدار عناء فأن الله تعالى ليس بظلام للعبيد .

سالم البغدادي

تابعونا على الفيس بوك / صفحة الى
جميع طلاب السادس الاعدادي اضغط هنا

إلى جميع طلاب السادس الاعدادي أضغط هنا

صفحة عراقية تربوية هدفها
التشجيع والحث على الدراسة

نسئل الله سبحانه و تعالى ان يوفقكم
و يوفقنا و يسهل امركم
و النجاح الباهر
و المعدل العالي يارب

مصطفى الشمري & برهان الساعدي

نسألـــــــكم الدعـــاء